FADDEEV-GLEICHUNGEN IN DER FUNKTIONALEN QUANTENTHEORIE DES NICHT-LINEAREN SPINORFELDES

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Ulrich Ramacher
aus Orsoy

1979

FADDEEV-GLEICHUNGEN IN DER FUNKTIONALEN QUANTENTHEORIE DES NICHT-LINEAREN SPINORFELDES

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Ulrich Ramacher
aus Orsoy

1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung:	27.11.1979
Dekan:	Prof. Dr. W. Prandl
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. Stumpf
2. Berichterstatter:	Priv.-Doz. Dr. A. Rieckers

RAMACHER, ULRICH:

FAADEEV-GLEICHUNGEN IN DER FUNKTIONALEN QUANTENTHEORIE DES NICHTLINEAREN SPINORFELDES

In Einleitung und Schluß diskutieren wir die Möglichkeit eines axiomatischen Rahmens für die Stumpf'sche Funktionaldarstellung der Heisenberg'schen einheitlichen Feldtheorie der Elementarteilchen und finden, daß die Wightman-Axiome für ein Feld mit indefiniter Metrik von der Heisenberg-Theorie notwendig zu erfüllen sind. Sie sind aber nicht hinreichend, denn in der Heisenberg-Theorie wird die indefinite Metrik durch die Dynamik des Urfeldes bestimmt.

Die Stumpf'sche Funktionale Quantentheorie geht deshalb über den Wightman-Rahmen hinaus und sorgt als erstes für eine Spezifikation des Hilbertraumes der Wightman-Theorie. Die Konstruktion dieses Hilbertraumes beruht auf einem algebraischen Integrationsverfahren; es stellt die mathematische Entsprechung des physikalischen Anspruchs dar, eine einheitliche Feldtheorie zu behandeln, und ist andererseits wie geschaffen für einen übersehbaren Rechenkalkül. Der so konstruierte Hilbertraum heißt funktionaler Hilbertraum, und alle Strukturen und Abbildungen des abstrakten Hilbertraumes strebt man an, funktional darzustellen.

Im Hauptteil beschäftigen wir uns mit der Ableitung von relativistischen Faadeev-Gleichungen für eben diese Funktionaldarstellung der nichtlinearen Spinortheorie. Nachdem die Heisenberggleichung schon funktional dargestellt ist, ist es deshalb erforderlich, 1. aus der dynamischen Funktionalgleichung das funktionale Analogon des Hamiltonoperators zu extrahieren und 2. die funktionalen Analoga von Clustern, "channel hamiltonians" und Resolventen etc. zu definieren. Dies wird in den Kapiteln I - III des Hauptteils getan; Kapitel III endet mit dem spezifischen Aufschrieb der Faadeev-Gleichungen als Energie-Impuls-Bilanzgleichungen. Letzteres wurde erreicht durch konsequente Anwendung der Fouriertransformation.

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung

I. Reduktion der Feldgleichung

II. Clusterdarstellungen von Wechselwirkungsoperatoren

III. Relativistische Kanalgleichungen
   A. Das relativistische Analogon der Lippmann-Schwinger-Gleichung
   B. Das relativistische Analogon der Faadeev-Gleichungen

IV. Anhang: Zur Theorie der Dipolregularisierung

V. Literaturverzeichnis

0. Einleitung

In der einheitlichen Feldtheorie der Elementarteilchen von Heisenberg / 1 / betrachtet man Feldoperatoren $\psi_\alpha(x)$, die nicht mit einer speziellen Teilchensorte verknüpft sind, sondern die Materie beschreiben, aus der die Elementarteilchen bestehen sollen.

In seinem Buch legt Heisenberg vorzüglich Wert auf eine systematische, physikalische Darstellung und Begründung seines Ansatzes und auf Methoden zur rechnerischen Erfassung und Auswertung der Theorie; die Frage, wie die beobachtete Physik in mathematische Sprache gefaßt werden soll, wird nur am Rande diskutiert, so daß es an manchen Stellen des Buches Kopfzerbrechen macht zu entscheiden, ob der angewendete Rechenkalkül zu einer Einmischung in die Theorie führt oder nicht.

In dieser Einleitung wird deshalb zusätzlich der Versuch einer axiomatischen Erfassung der Heisenberg-Theorie gemacht, wenn auch die weitergehende mathematische Analyse der definierenden Eigenschaften des Heisenbergfeldes noch fehlt.

Eine Algebra von Feldoperatoren $\psi_\alpha(x)$ heißt fundamental, wenn sie eine einfache und nicht-triviale Darstellung der den Elementarteilchenprozessen zugrunde liegenden Symmetrien bildet. Weitere Darstellungen erhält man auf folgende Art:

$$O_\alpha(f,x) := \int d\xi\ \psi_\alpha(x+\xi)\, f_\alpha(\xi)$$

$$O_\lambda(f,x) := \int \psi_\alpha(x)\,\psi_\beta(x+\xi_1)\ldots\psi_\gamma(x+\xi_n)\, f_{\beta\ldots\gamma}(\xi_1,\ldots,\xi_n)\, d\xi_1\ldots d\xi_n .$$

Betrachtet man die Symmetrien als grundlegend für die Beschreibung der Elementarteilchen, so ist man also gezwungen, ein Kriterium für die Kompatibilität der Polstruktur der (unendlichen Vielzahl von) Zweipunktfunktionen $W_2(f,x,g,x') := \langle \Omega | O_\lambda(f,x)\, O_\mu^*(g,x')\, \Omega \rangle$ aufzustellen.

Da ein Pol zu einer bestimmten Symmetrie gehört, sollte die Polstruktur der Zweipunktfunktionen $W_2(f, x, g, x')$ unter den Abbildungen $\psi_\alpha(x) \longrightarrow O_\lambda(f, x)$ erhalten bleiben (wenn auch nicht die Residualstruktur). Beschreiben wir ein Elementarteilchen durch den Pol einer bestimmten Symmetrie, so muß also ein Feldoperator $O_\lambda(f,x)$ existieren, so daß in der Zustandsbeschreibung dieses Teilchens durch einen Vektor a das Matrixelement $\langle \Omega \mid O_\lambda(f,x)\, a \rangle$ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt:

$$(\Box + m^2) \langle \Omega \mid O_\lambda(f,x)\, a \rangle = 0 .$$

Als Kriterium, welches die richtige, das Elementarteilchenspektrum beschreibende Feldoperatorenalgebra ausfiltert aus der Vereinigung aller fundamentalen Darstellungen zu einer Symmetrie, betrachtete Heisenberg eine Feldgleichung als geeignet, die die Wechselwirkung und durch ihre Transformationseigenschaft die Symmetrien des zugrunde liegenden Naturgesetzes darstellt.

Bezeichnen wir die richtige Feldoperatorenalgebra mit $\{ O_\lambda(f_i)_i \}_{i \in I}$, so können wir den Ausdruck $\sum_I di \langle \Omega \mid O_\lambda(f,x)_i\, O^*_\lambda(g,x')_i \Omega \rangle$ als Zweipunktfunktion (:= $\langle \Omega \mid O(x) O^*(x') \Omega \rangle$) des Urfeldes $O(x)$ ansehen.

Die Indexmenge I ist sicherlich nicht endlich, bestenfalls abzählbar unendlich, und das Feld gehorcht der Heisenberg-Gleichung

$$D_{\alpha\beta}(x) O_\beta(x) + V_\alpha^{\beta\gamma\delta} : O_\beta(x) O_\gamma(x) O_\delta(x) : = 0 ;$$

$D_{\alpha\beta}(x)$ ist der hermitesche Dirac-Operator und $V_\alpha^{\beta\gamma\delta}$ der Operator der Wechselwirkung; eine explizite Darstellung findet man in /2/.

In der Heisenberg-Theorie besteht also von vornherein ein enger Zusammenhang zwischen der Zweipunktfunktion des Feldes O und dem Term der Wechselwirkung in der Feldgleichung. Entweder studiert man also den Differentialoperator der Theorie oder die Struktur der Zweipunktfunktion der Theorie.

Erstes hat man wegen der mathematischen Schwierigkeiten noch nicht begonnen von Seiten der Physiker; es gibt jedoch inzwischen eine systematische Untersuchung von Hörmander /3/ und Duistermaat /4/ für partielle Differentialoperatoren, in der die Singularitätenstruktur der Zweipunktfunktion und deren Propagation untersucht wird mit dem Konzept der Wellenfrontmengen und oszillatorischen Integrale. Dieses Konzept ist geeignet auch zum Studium von Produkten von Distributionen, führt also direkt zu der von den Physikern schon lange aufgeworfenen Frage, wie eine Feldtheorie zu regularisieren ist. Erste Regularitätstheoreme für bestimmte Klassen von partiellen Differentialoperatoren existieren bereits /4/.

Das Regularisierungsproblem ist Heisenberg auf folgende Weise angegangen:

Der Wechselwirkungsterm in seiner Feldgleichung produziert in der integralen Formulierung der Feldgleichung Produkte von der Zweipunktfunktion des Feldes φ. Nimmt man eine Kaellen-Lehmann-Darstellung der Zweipunktfunktion an, so enthält die gewöhnliche Schwinger'sche Funktion zur Masse m Terme proportional zu $\delta'[(x-x')^2]$ und $m^2 \cdot \delta[(x-x')^2]$. In der Kaellen-Lehmann-Darstellung der Zweipunktfunktion, $W_2(x) = \int_0^\infty \varsigma(m^2)dm \; \Delta(x,m^2)$, können die entsprechenden Terme nur verschwinden, wenn $\int dm\, \varsigma(m^2) = 0$ und $\int dm\, m^2 \varsigma(m^2) = 0$ wird. Das "Endlich machen" der Zweipunktfunktion - zum Zwecke der Definition von Produkten von Distributionen - bedingt also die Einführung eines nicht nur positiven Massenspektrums $\varsigma(m^2)$, oder, wie man auch sagt, die Einführung von indefiniter Metrik.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so lautet die Kaellen-Lehmann-Darstellung nun:

$$W_2(x) = \int dm\, \varsigma(m^2) \int d^4p \left(\frac{1}{-p^2+m^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{m^2}{p^4}\right) e^{-ipx}$$

$$= \int dm\, \varsigma(m^2) \int d^4p \, \frac{m^4}{(-p^2+m^2)p^4} \, e^{-ipx}$$

Geht man andererseits von einer solchen Darstellung aus, so exi
stiert immer ein Massenspektrum $\tilde{\varsigma}(m^2)$, welches diese Dar-
stellung invariant läßt und den Relationen $\int dm\ \tilde{\varsigma}(m^2) =$
$\int dm\ m^2\ \tilde{\varsigma}(m^2) = 0$ genügt; nämlich:

$$\tilde{\varsigma}(m^2) = \varsigma(m^2) - \delta(m^2)\int \varsigma(m^2)dm^2 + \delta'(m^2)\int\varsigma(m^2)m^2dm^2 .$$

Zu anderen Varianten der regularisierten Zweipunktfunktion komm
man, wenn man annimmt, daß die Skaleninvarianz der Feldgleichun
nicht vom Grundzustand und Antikommutator geteilt wird; wir ge-
hen darauf nicht weiter ein, sondern verweisen auf /5/.

Die Heisenberg-Regularisierung bedingt, daß $W_2(0) = 0$ ist; da
die Zweipunktfunktion den Vakuumerwartungswert des Antikommuta-
tors enthält, bedingt die Regularisierung der Zweipunktfunktion
eine Quantisierung des Antikommutators, die nicht die kanonisch
sein kann. Von Heisenberg werden Oszillationen am Lichtkegel
$x^2 = 0$ vermutet /6/, so daß im Sinne eines Mittels gilt:

$$[O(x), O(x')]^+ \approx 0$$

Da die Zweipunktfunktion des Feldes O - wie oben beschrieben
als eine verallgemeinerte Kaellen-Lehmann-Darstellung angesehen
werden darf, in der zusätzlich eine Integration über die funda-
mentalen Darstellungen zu der Symmetriegruppe der starken Wech-
selwirkung vollzogen wird, so ist es nicht unwichtig, sich klar
zu machen, daß die Abbildungen $\psi_\alpha(x) \longrightarrow O_\lambda(f,x)$ mit dem
ad-hoc Regularisierungsprozeß verträglich sind bzw. ihn definie
ren; im Anhang wird gezeigt, daß jede dieser Abbildungen eine
nichtkanonische Quantisierung definiert. Betrachtet man nur den
Prozeß $\psi_\alpha(x) \longrightarrow \int dx\, \psi_\alpha(x+\xi) f(\xi)$, , wobei f ein
geeignete Distribution ist, so reproduziert sich die Struktur
der Heisenberg-Regularisierung. In diesem Sinne ist die Heisen-
berg-Regularisierung eine Approximation, denn erst die Berück-
sichtigung aller Abbildungen definiert die nichtkanonische Quan
tisierung.

Es mag jedoch durchaus sein, daß die Wechselwirkung nur endlich
viele solcher Prozesse benötigt.

Zufolge der nichtkanonischen Quantisierung steht der Lagrange-
und Hamiltonformalismus nicht mehr in korrespondenzmäßiger Be-

ziehung zur Feldgleichung; für eine Übersicht über regularisierende Lagrange-Theorien siehe /7/.

Somit bleibt nur die Feldgleichung übrig; sie wird ausgewertet, indem man sie auf die zeitgeordneten Produkte von Feldoperatoren anwendet und von solchen Produkten Übergangsamplituden zwischen Vakuum und einem Zustand a betrachtet:

$$\tau(x_1 x_2 \ldots | y_1 y_2 \ldots) := \langle \Omega | T\, O(x_1) O(x_2) \ldots O^*(y_1) O^*(y_2) \ldots | a \rangle$$

Da bei nichtkanonischer Quantisierung das Entwicklungsschema für zeitgeordnete Produkte nach normalgeordneten Produkten zusammenbricht, muß man als Ersatz für eine Wick-Regel eine Abbildung von dem τ-Funktionensystem auf ein neues Funktionensystem, das φ-Funktionensystem, definieren. Diese Abbildung nennen wir Normaltransformation und sollte sich an den Eigenschaften der Wick-Transformation orientieren:

a) das φ-Funktionensystem soll auflösbar sein in jeder Näherung und eine Zustandsentwicklung gestatten;

b) für beliebige Zustände a, b soll $\langle a | [O(x), O^*(y)]_+ | b \rangle$ kompatibel sein mit der nichtkanonischen Quantisierung, gegeben durch die regularisierte Zweipunktfunktion.

Die zweite Eigenschaft drückt aus, daß die gewünschte Abbildung keine zusätzliche Singularitätenstruktur einführt; eine Normaltransformation hat Heisenberg interessanterweise definiert als Lippmann-Schwinger-Gleichung für die (unbekannte) Zweipunktfunktion /8/.

An dieser Stelle ist es von Vorteil, die Funktionaldarstellung der τ-Funktionen, der Normaltransformation und der dynamischen Gleichung einzuführen, weil sie eine kompakte Formulierung der τ- bzw. φ-Funktionensysteme gestattet. Zuvor wollen wir jedoch die definierenden Eigenschaften des Heisenberg-Feldes zusammenfassen; dabei berücksichtigen wir, daß eine genauere Analyse der regularisierten Zweipunktfunktion die Struktur der indefiniten Metrik festlegt /9/.

Denn bezeichnen wir den linearen Raum der Theorie mit D, so ist durch die regularisierte Zweipunktfunktion die indefinite Metrik als nichtausgeartete Sesqui-Linearform $(\cdot,\cdot)$ auf D gegeben. Es sei $\mathcal{H} := \{a \in D : (a,a) > 0\} \cup \{0\}$ und $\mathcal{H}^{\perp} := \{z \in D : (z,z) = 0\}$. Dann ist $\langle\,,\rangle := (\,,\,)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ ein Skalarprodukt, und wir nehmen an, daß $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum ist. Nun zeigt die Partialbruchzerlegung der regularisierten Zweipunktfunktion, daß $\langle\,,\rangle$ auf D fortsetzbar ist (wir verwenden dafür dasselbe Zeichen) und daß auf dem Hilbertraum $(D, \langle\,,\rangle)$ ein unitärer Operator G existiert, so daß gilt:

$$(\cdot,\cdot) = \langle\cdot, G\,\cdot\rangle \qquad \text{und} \qquad G_{\mid\mathcal{H}} = Id_{\mathcal{H}}$$

Offenbar enthält der Hilbertraum $H := (D, \langle\,,\rangle)$ mehr als nur die physikalischen Zustände von $\mathcal{H}$; dies ist erklärlich aus der Tatsache, daß die S-Matrix sich immer nur auf bestimmte Werte von Energie und Impuls bezieht, also auf der Massenschale definiert ist. Sind aber die totale Energie und der Gesamtimpuls gegeben, so ist die Untergruppe (der Poincarégruppe) der dann noch verbleibenden Transformationen kompakt. Kompakte Gruppen aber können in positiv-definiten endlich-dimensionalen linearen Räumen dargestellt werden, so daß es ganz natürlich ist, den S-Operator als unitären Operator auf $\mathcal{H}$ zu definieren /10/.

Wenn $S(\cdot)$ eine endlich dimensionale (notwendig nicht unitäre) irreduzible Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ auf einem linearen Raum der Dimension d ist, so definieren wir deshalb das Heisenberg'sche Spinorfeld vom Typ S durch das 5-tupel (H, U, O, D, η) welches folgenden Eigenschaften genügen soll:

Eigenschaft 1: H ist ein separabler Hilbertraum und $U(\cdot,\cdot)$ ist eine stark stetige unitäre Darstellung auf H (von der Überlagerungsgruppe $In\ SL(2,\mathbb{C})$) der eingeschränkten Poincarégruppe.

Eigenschaft 1 sichert die relativistische Invarianz der Zustände.

Nach einem Theorem von Stone existieren auf H für die Translationsgruppe $U(\cdot) := U(\cdot, Id)$ vier vertauschende selbstadjungierte Operatoren P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 und ein projektionswertiges Maß E_Ω auf $\mathbb{R}^4$, so daß gilt:

$$\langle a|U(x)a\rangle = \langle a|\exp(ix^\mu p_\mu)a\rangle = \int_{\mathbb{R}^4} \exp(ix^\mu p_\mu)\, d\langle a|E_\Omega a\rangle;$$

P_0 ist der freie Hamiltonoperator und die P_i, $1 \leq i \leq 3$, sind die Impulsoperatoren.

Eigenschaft 2: Der Träger von E_Ω liegt im Vorwärtslichtkegel.

Eigenschaft 3: Es existiert ein Vektor $\Omega \in H$, so daß $U(a)\Omega = \Omega$ für alle $a \in \mathbb{R}^4$. Ω heißt Vakuum.

Es folgt, daß $U(a, \Lambda)\Omega = \Omega$ für alle $(a, \Lambda) \in P_+^\uparrow$

Eigenschaft 4: Es existieren ein dichter Unterraum $V \subset H$ und d Abbildungen O_i von einem Testfunktionenraum S (über $\mathbb{R}^4$) in die unbeschränkte Operatorenalgebra L(H) von H mit:

(i) $\Omega \in V$ und $O_i(f)V \subset V$

(ii) $V \subset D[O_i(f)]$, $V \subset D[O_i^*(f)]$, $D \hat{=}$ Definitionsbereich

(iii) $f \longrightarrow O_i(f)$ ist linear für festes $a \in V$.

(i) soll bewirken, daß die Vakuumerwartungswerte existieren.

Eigenschaft 5: Für beliebige a, b $\in$ V ist die Abbildung $f \longrightarrow \langle a | O_i(f) b \rangle$ eine stetige Linearform auf dem Testfunktionenraum S.

Eigenschaft 6: $\Omega \in V$ ist zyklisch für $\{O_1(f), \ldots, O_d(f), O_1^*(f) \ldots O_d^*(f) \mid f \in S\}$.

Eigenschaft 7: Für raumartige Testfunktionen $f, g \in S$ gilt:

$$[O_i(f), O_j(g)]_+ = 0 = [O_i^*(f), O_j(g)]_+ .$$

Eigenschaft 8: Für jedes $(a, \Lambda) \in P_+^\uparrow$ gilt: $U(a,\Lambda)V \subset V$; ferner gilt für alle $A \in lnSL(2,\mathbb{C})$ mit $\Lambda = \Lambda(A)$:

$$U(a,\Lambda) O_i(x) U(a,\Lambda)^{-1} = \sum_{j=1}^{d} S(A^{-1})_{ij}\; O_j(a + \Lambda x)$$

Eigenschaft 9: Es existiert eine nicht ausgeartete hermitesche Sesquilinearform $\eta \odot \eta$, welche eine unitäre Operatordarstellung G auf H besitzt; $\eta : H \longrightarrow H$ wird gegeben durch

$$\prod_{i=1}^{n} O_i^\#(f_i)\,\Omega \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} O_i^\#(F * f_i)\,\Omega \;, \quad (\# = \cdot \vee *),$$

und $F \in S'$; η hat die Eigenschaft, daß $G|_{\mathcal{H}} = Id_{\mathcal{H}}$

Es folgt z.B. für die Zweipunktfunktion des Feldes $\Phi(F*\cdot)$:

$$\langle \Phi(F*g)\Omega \mid \Phi(F*f)\Omega\rangle = \langle \eta\,\Phi(g)\Omega \mid \eta\,\Phi(f)\Omega\rangle$$

$$= \langle \Phi(g)\Omega \mid \eta\circ\eta \mid \Phi(f)\Omega\rangle = \langle \Omega \mid \Phi^{*}(g)\,G\,\Phi(f)\Omega\rangle$$

$$=: (\Omega \mid \Phi^{*}(g)\Phi(f)\Omega)$$

Entsprechendes gilt für beliebige n-Punkt-Funktionen.

Ohne die Spezifikation der Abbildung η durch ein $F \in \mathcal{S}'$ stellen die Eigenschaften $E_1 \ldots E_9$ die Wightman-Axiome für indefinite Metrik dar; zu ihnen gehört ein Rekonstruktionstheorem (siehe Anhang).

Wie schon erörtert, wird die Wahl einer geeigneten Abbildung η in der Heisenberg-Theorie durch die fundamentale Feldgleichung bestimmt; deshalb fordern wir zusätzlich zu den Wightman-Axiomen der indefiniten Metrik die

<u>Eigenschaft 10:</u> Es sei $d = 8$; dann genügt $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_d)$ der Heisenberggleichung und $\Phi_F = (\Phi_1(F*\cdot), \ldots, (\Phi_d(F*\cdot))$ der (entsprechend transformierten) Heisenberggleichung.

In der Heisenberg-Theorie ist also die Regularisierung ein dynamisches Problem; wenn es eine Lösungstheorie zu E_9 gibt, so sollte die bedeuten, daß

(i) die τ_n-Funktionen definierbar sind;

(ii) das τ-Funktionensystem eine Normaltransformation in ein neues Funktionensystem zuläßt, welches eine Zustandsentwicklung für jeden Zustand $b \in H$ zuläßt.

Da ähnlich wie die Wightman-Axiome der indefiniten Metrik die Eigenschaften $E_1, \ldots, E_{10}$ nur den Rang von Arbeitshypothesen haben, verbleibt die Berechnung der τ_n-Funktionen.

Zu diesem Zweck haben H. Stumpf und Mitarbeiter einen funktionalen Hilbertraum konstruiert, in dem sich auf kompakte Art das normaltransformierte Funktionensystem der τ_n-Funktionen und die Feldgleichung formulieren lassen.

Das Prinzip, welches zur Konstruktion des Funktionalraums führt, ist einfach zu schildern: Da erst die Gesamtheit der τ_n-Funktionen einen Zustand $b \in \mathcal{H}$ charakterisiert (der z.B. asymptotisch ein Teilchen darstellt), denkt man leicht an eine Art Aufsummierung der τ_n-Funktionen; andererseits korreliert die Feldgleichung die τ_n-Funktionen untereinander, so daß die τ_n-Funktionen in jeder ihrer Variablen codiert werden müssen. Z.B. setzen wir an als Codewort für

$$\tau_n(x_1,i_1;\ldots;x_n,i_n\,|\,b) \;:\; j_{i_1}(x_1)\,j_{i_2}(x_2)\ldots j_{i_n}(x_n)\,,$$

und betrachten τ_n als Koeffizient dieses Codeworts. Dieser Code reicht jedoch nicht aus, weil er weder die Antisymmetrie der τ_n-Funktionen wiedergibt, noch die Korrelationen der τ_n-Funktionen beschreibt. Da die Feldgleichung auf die Feldoperatoren φ_i bzw. φ_j^* wirkt, die in den τ_n-Funktionen stehen, verlangt man deshalb die Codierung der Feldoperatoren: $\varphi_i^*(x)$ ordnen wir das Codewort $j_i(x)$ und $\varphi_j^*(x)$ ordnen wir das Codewort $\vartheta_j(x)$ zu.

Die Antisymmetrie der τ_n-Funktionen und die Korrelationsfähigkeit des Codes drücken wir dann dadurch aus, daß wir verlangen, $\{j_i(x),\vartheta_j(x)\}$ bilden eine Clifford-Algebra:

$$[j_i(x),\vartheta_j(x')]_+ = \delta_{ij}(x-x')\,,\quad [j_i(x),j_j(x')]_+ = 0\,,$$

$$[\vartheta_i(x),\vartheta_j(x')]_+ = 0\,.$$

Die Tatsache, daß es nichts zu codieren gibt, drücken wir aus durch ein Symbol, $\emptyset$, für das gelten soll: $\vartheta_i(x)\emptyset = 0$; die Tatsache, daß der Code nicht trivial sein soll, beschreiben wir so: $j_i(x)\emptyset \neq 0$

Einem Zustand $a \in V$ ordnen wir dann folgenden Funktionalzustand zu:

$$\tau(j,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{n!}\, dx_1 \ldots dx_n\, \tau_n(x_1,i_1;\ldots;x_n,i_n\,|\,a)\, j_{i_1}(x_1)\ldots j_{i_n}(x_n)\emptyset$$

Hierbei ist τ_n formuliert in der von Dürr und Wagner eingeführten hermiteschen Formulierung des Feldes φ /2/.

Die Menge aller dieser Funktionalzustände bildet sodann einen linearen Raum, den Funktionalraum; wir setzen zur Abkürzung:

$$D_n(x_1,i_1;\ldots;x_n,i_n) := j_{i_1}(x_1)\cdots j_{i_n}(x_n)\emptyset$$

Der Code bzw. die Abbildung $a \longrightarrow \tau(j,a)$ wird selbstkonsistent, wenn es gelingt, die Eigenschaften $E_1 \ldots E_{10}$ als Eigenschaften auf dem Funktionalraum zu formulieren.

Dies ist in allen Einzelheiten in dem Artikel /11/ durchgeführt worden; die funktionale Übersetzung der Feldgleichung in normaltransformierte Funktionalzustände lautet sodann:

$$[\, D_{\alpha\beta}d_\beta(x) + V_\alpha^{\beta\gamma\delta}d_\beta(x)\,d_\gamma(x)\,d_\delta(x)]\,\tau(j,a) = 0\ ;$$

dabei ist $d_\beta(x) := \partial_\beta(x) + F_{\beta i} * j_i(x)$ und F ein Ausdruck für die regularisierte Zweipunktfunktion.

Diese kompakte, funktionale Feldgleichung ist der Ausgangspunkt für die nächsten Kapitel. Im folgenden werden im Prinzip dieselben Methoden wie in der nichtrelativistischen Quantentheorie benützt. Das deutete sich schon an durch die Wahl des Codes, der ja der normalen Fockraum-Konstruktion entspricht; im Anhang wird übrigens auch gezeigt, daß bei nichtkanonischer Quantisierung die Fockdarstellung für das asymptotische Feld und das Heisenbergfeld mit nicht-trivialer S-Matrix überhaupt möglich ist.

Nach Heisenberg genügt zur Beschreibung der makroskopischen Observablen die Auswertung der S-Matrix; sie setzt voraus die Definition und Berechnung von asymptotischen Zuständen. Wir tun dies hier mittels Lippmann-Schwinger-Gleichungen und Faadeev-Gleichungen bzw. deren relativistischen Analoga; insbesonders haben wir Wert gelegt auf die vollständige Definition der Faadeev-Operatoren im Impulsraum. Ansonsten sind wir wie im Buch von Schmid/Ziegelmann vorgegangen /12/.

Es verbleiben das Problem der Berechnung des Skalarprodukts für Lösungen der Feldgleichung und das Problem der Unitarisierung; sie werden in dieser Arbeit nicht behandelt. Wir verweisen deshalb auf die Arbeiten /9, 13/.

I. Reduktion der Feldgleichung

Die dynamische Feldgleichung in Φ-Funktionalzuständen lautet /14/:

$$[\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\delta_{\mu}(x)d_{\beta}(x) + V_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}\, d_{\beta}(x)\, d_{\gamma}(x)\, d_{\delta}(x)\,]\,\Phi(j,a) = 0$$

$$=: D_{\alpha}(x)\,\Phi(j,a)\,.$$

$d_{\beta}(x)$ steht für $(\vartheta_{\beta}(x) + F_{\beta\lambda} * j_{\lambda}(x)$

Zufolge der nichtkanonischen Quantisierung ist F(0) "faktisch" gleich Null zu setzen; dies bewirkt, daß Ausdrücke der Art $\prod_{i=1}^{n} d_i(x)$ identisch sind mit ihren normalgeordneten Ausdrükken.

Dann lautet also der Ausdruck für $D_{\alpha}(x)$:

$$D_{\alpha}(x) = \gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\delta_{\mu}(x)\,\vartheta_{\beta}(x) + \gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\delta_{\mu}(x)\; F_{\beta\lambda} * j_{\lambda}(x)$$

$$+ V_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}\vartheta_{\beta}(x)\;\vartheta_{\gamma}(x)\;\vartheta_{\delta}(x)$$

$$+ V_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}[F_{\delta\lambda} * j_{\lambda}(x)\,\vartheta_{\beta}(x)\,\vartheta_{\gamma}(x) - F_{\gamma\lambda} * j_{\lambda}(x)\,\vartheta_{\beta}(x)\,\vartheta_{\delta}(x)$$

$$+ F_{\beta\lambda} * j_{\lambda}(x)\;\vartheta_{\gamma}(x)\;\vartheta_{\delta}(x)]$$

$$+ V_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}[F_{\gamma\lambda} * j_{\lambda}(x)\; F_{\delta\nu} * j_{\nu}(x)\;\vartheta_{\beta}(x) + F_{\beta\lambda} * j_{\lambda}(x)\; F_{\gamma\nu} * j_{\nu}(x)\;\vartheta_{\delta}(x)$$

$$- F_{\beta\lambda} * j_{\lambda}(x)\; F_{\delta\nu} * j_{\nu}(x)\;\vartheta_{\gamma}(x)]$$

$$+ V_{\alpha}^{\beta\gamma\delta}\, F_{\beta\lambda} * j_{\lambda}(x)\; F_{\gamma\nu} * j_{\nu}(x)\, F_{\delta\iota} * j_{\iota}(x)\,.$$

Nun nützen wir aus, daß $V_\alpha^{\beta\gamma\delta}$ ein total antisymmetrischer Ausdruck ist, und sehen, daß bei Summation über β,γ,δ die einzelnen Summanden in den jeweiligen Klammern das gleiche Ergebnis haben; wir erhalten den kürzeren Ausdruck:

$$D_\alpha(x) = \gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\delta_\mu(x)\,d_\beta(x) + V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,\vartheta_\beta(x)\,\vartheta_\gamma(x)\,\vartheta_\delta(x)$$

$$+ 3V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,F_{\beta\lambda} * j_\lambda(x)\,\vartheta_\gamma(x)\,\vartheta_\delta(x)$$

$$+ 3V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,F_{\beta\lambda} * j_\lambda(x)\;F_{\gamma\nu} * j_\nu(x)\,\vartheta_\delta(x)$$

$$+ V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,F_{\beta\lambda} * j_\lambda(x)\;F_{\gamma\nu} * j_\nu(x)\;F_{\delta\iota} * j_\iota(x).$$

Zufolge der Baryonenzahlsymmetrie verschwinden alle Funktionen φ_κ , $0 \leq \kappa < \varsigma$, wobei ς die erhaltene Baryonenzahl ist, so daß wir für den Funktionalzustand Φ ansetzen können:

$$\Phi(j,a) = \sum_{\lambda=0,2,\ldots}^{\infty} \int dx_1 \ldots dx_{\varsigma+\lambda}\,\varphi_{\varsigma+\lambda}(x_1\alpha_1,\ldots,x_{\varsigma+\lambda}\alpha_{\varsigma+\lambda}\,|\,a)$$

$$\cdot D_{\varsigma+\lambda}(x_1\alpha_1,\ldots,x_{\varsigma+\lambda}\alpha_{\varsigma+\lambda}) =: \sum_{\lambda=0,2,\ldots}^{\infty} \Phi^{(\varsigma+\lambda)}(j,a)$$

Daraus resultiert für $D_\alpha(x)\;\Phi(j,a)$:

$$(D_\alpha(x)\,\Phi(j,a))^{(\varsigma-1)} = 0$$

$$= [\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}\delta_\mu(x)\,\vartheta_\beta(x) + 3V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,F_{\beta\lambda} * j_\lambda(x)\;\vartheta_\gamma(x)\,\vartheta_\delta(x)\,]\,\Phi^{(\varsigma)}(j,a)$$

$$+ V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\vartheta_\beta(x)\,\vartheta_\gamma(x)\,\vartheta_\delta(x)\,\Phi^{(\varsigma+2)}(j,a),$$

$$(D_\alpha(x)\,\Phi(j,a))^{(\varsigma+1)} = 0$$

$$= [\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\delta_\mu(x)\,\vartheta_\beta(x) + 3V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,F_{\beta\lambda}*j_\lambda(x)\,\vartheta_\gamma(x)\,\vartheta_\delta(x)]\;\Phi^{(\varsigma+2)}(j,a)$$

$$+ V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,\vartheta_\beta(x)\,\vartheta_\gamma(x)\,\vartheta_\delta(x)\;\Phi^{(\varsigma+4)}(j,a)$$

$$+ [\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\delta_\mu(x)\,F_{\beta\lambda}*j_\lambda(x) + 3V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,F_{\beta\lambda}*j_\lambda(x)\;F_{\gamma\nu}*j_\nu(x)\,\vartheta_\delta(x)]\,\Phi^{(\varsigma)}(j,a)\,,$$

$$(D_\alpha(x)\,\Phi(j,a))^{(\varsigma+3)} = 0$$

$$[\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\delta_\mu(x)\,\vartheta_\beta(x) + 3V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,F_{\beta\lambda}*j_\lambda(x)\,\vartheta_\gamma(x)\,\vartheta_\delta(x)]\,\Phi^{(\varsigma+4)}(j,a)$$

$$+ V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,\vartheta_\beta(x)\,\vartheta_\gamma(x)\,\vartheta_\delta(x)\;\Phi^{(\varsigma+6)}(j,a)$$

$$+ [\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\delta_\mu(x)\,F_{\beta\lambda}*j_\lambda(x) + 3V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\,F_{\beta\lambda}*j_\lambda(x)\;F_{\gamma\nu}*j_\nu(x)\,\vartheta_\delta(x)]\,\Phi^{(\varsigma+2)}(j,a)$$

$$+ V_\alpha^{\beta\gamma\delta}\;F_{\beta\lambda}*j_\lambda(x)\,F_{\gamma\nu}*j_\nu(x)\;F_{\delta\iota}*j_\iota(x)\;\Phi^{(\varsigma)}(j,a)$$

$$=: A_1\,\Phi^{(\varsigma+4)} + A_2\,\Phi^{(\varsigma+2)} + A_3\,\Phi^{(\varsigma+6)} + A_4\,\Phi^{(\varsigma)}\quad .$$

Für alle $4 \leq \lambda \in 2\mathbb{N}$ gilt somit:

$$0 = (D_\alpha(x)\,\Phi(j,a))^{(\varsigma-1+\lambda)}$$

$$= A_1\Phi^{(\varsigma+\lambda)} + A_2\Phi^{(\varsigma+\lambda-2)} + A_3\Phi^{(\varsigma+\lambda+2)} + A_4\Phi^{(\varsigma+\lambda-4)}$$

Damit haben wir die explizite Matrixdarstellung erhalten:

$$D_\alpha(x)\,\Phi = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_3 & 0 & \cdot & \cdot \\ A_2 & A_1 & A_3 & \ddots & \\ A_4 & A_2 & A_1 & \cdot & \cdot \\ & A_4 & A_2 & \cdot & \cdot \\ 0 & & A_4 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{(s)} \\ \Phi^{(s+2)} \\ \Phi^{(s+4)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A_1\,\Phi^{(s)} + A_3\,\Phi^{(s+2)} = 0$$

$$D_\alpha(x)X - A_3\,\Phi^{(s+2)} + (A_2 + A_4)\,\Phi^{(s)} = 0$$

$$\text{mit} \quad X := \sum_{\lambda=0,2,\ldots}^{\infty} \Phi^{(s+2+\lambda)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(A_1\,\Phi^{(s)} + A_3 X)^{(s-1)} = 0$$

$$(D_\alpha(x)X + (D_\alpha(x) - A_3)\,)\,\Phi^{(s)} = 0$$

(1)

Das folgende Verfahren von Stumpf /15/ gestattet, eine algebraisch formale Beziehung zwischen X und $\Phi^{(s)}$ anzugeben: aus der zweiten Zeile von (1) bestimmt es eine Lösung von X als

Funktion von $\Phi^{(\varsigma)}$ und setzt diese Lösung in die erste Zeile von (1) ein; dann entsteht eine Funktionalgleichung allein in $\Phi^{(\varsigma)}$.

Nämlich der zweiten Zeile von (1) ordnen wir folgendes inhomogene Problem zu:

$$D_\alpha(x)X = (D_\alpha(x) - A_3) \Phi^{(\varsigma)} =: \varsigma_\alpha(x)$$

Setzen wir

1. $d_\alpha(x)X := K_\alpha(x)$

2. $\int dx' \, G_{\alpha\alpha'}(x,x') \gamma^\mu_{\alpha'\beta} \delta_\mu(x) = \delta_{\alpha\beta}$,

so können wir schreiben:

$$D_\alpha(x)X = \varsigma_\alpha(x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$K_\alpha(x) + \int dx' \, G_{\alpha\alpha'}(x,x') \, V^{\beta\gamma\delta}_{\alpha'} \, d_\beta(x') \, d_\gamma(x') \, K_\delta(x')$$

$$= \int dx' \, G_{\alpha\alpha'}(x,x') \varsigma_{\alpha'}(x') =: (G\varsigma)_\alpha(x) .$$

Dann fassen wir

$$T_{\alpha\delta}(x,x') := G_{\alpha\alpha'}(x,x') \, V^{\beta\gamma\delta}_{\alpha'} \, d_\beta(x') \, d_\gamma(x')$$

als Integralkern eines Operators $T(x) := (T_\alpha(x))$ auf, für den gilt:

$$K(x) + T(x)K(x) = (G\varsigma)(x)$$

Die formale Neumann-Entwicklung

$$K_\delta(x) = (G\varsigma)_\delta(x) + \int T_{\delta\eta}(x,x')(G\varsigma)_\eta(x') \, dx'$$

$$+ \iint T_{\delta\mu}(x,x') \, T_{\mu\eta}(x',x'') \, (G\varsigma)_\eta(x'') \, dx' \, dx'' + \ldots$$

betrachten wir als Lösung und setzen sie in die erste Zeile von (1) ein:

$$(A_1 \Phi^{(\varsigma)} + A_3 X)^{(\varsigma-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \Phi^{(\varsigma)} + V_\alpha^{\beta\gamma\delta} \vartheta_\beta(x)\, \vartheta_\gamma(x)\, K_\delta(x))^{(\varsigma-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \Phi^{(\varsigma)} + V_\alpha^{\beta\gamma\delta} \vartheta_\beta(x)\, \vartheta_\gamma(x) \{ (G\varsigma)_\delta(x) + \int T_{\delta\eta}(x,x') (G\varsigma)_\eta(x')$$

$$+ \ldots \})^{(\varsigma-1)} = 0$$

Daraus erhalten wir in erster Näherung:

$$\{ \gamma^\mu_{\alpha\beta}\, \delta_\mu(x)\, \vartheta_\beta(x) + 3 V_\alpha^{\beta\gamma\delta} F_{\beta\lambda} * j_\lambda(x)\, \vartheta_\gamma(x)\, \vartheta_\delta(x)$$

$$+ V_\alpha^{\beta\gamma\delta} F_{\delta\nu} * j_\nu(x)\, \vartheta_\beta(x)\, \vartheta_\gamma(x)$$

$$+ V_\alpha^{\beta\gamma\delta} \int dx'\, G_{\delta\lambda}(x,x')\, 3 V_\lambda^{\beta'\gamma'\delta'} F_{\beta'\nu} * j_\nu(x')\, F_{\gamma'\varkappa} * j_\varkappa(x')$$

$$\cdot \vartheta_{\delta'}(x')\, \vartheta_\beta(x)\, \vartheta_\gamma(x) \}\ \Phi^{(\varsigma)} = 0$$

Es ist zu beachten, daß bis jetzt alle auftretenden Erzeugeroperatoren j als Faltung mit F auftreten, so daß alle Neumann-Summanden immer mit ihren normalgeordneten Ausdrücken identisch sind; ferner, wenn wir die reduzierte Gleichung kurz als $O(j,\delta)\,\Phi^{(\varsigma)} = 0$ schreiben, daß $O(j,\delta)$ von der erhaltenen Baryonenzahl ς abhängt.

Der Sinn des Reduktionsschrittes besteht darin, die Äquivalenz

$$D_a(x)\,\Phi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} O_\infty(j,\delta)\,\Phi^{(s)} = 0 \\ (Id + T)X = G_S \end{matrix}$$

zu etablieren, so daß in O_∞ ("∞" berücksichtige die volle Neumann-Reihe) die maximale Information enthalten ist, die die "Polarisationswolke" X für $\Phi^{(s)}$ enthält. Statt des Operators A_1 haben wir allerdings einen komplizierten Operator $O_\infty(j,\delta)$, der im Prinzip alle Produkte von Potenzen in den Erzeugungsoperatoren j und in den Vernichtungsoperatoren ϑ enthält, so daß wir $(O_\infty(j,\delta) - A_1)$ als das durch die Polarisationswolke X. erzeugte phänomenologische Potential für $\Phi^{(s)}$ ansehen können:

$$(A_1 + V)\,\Phi^{(s)} = 0 \qquad \text{mit } V := O(j,\delta) - A_1 \,.$$

II. Clusterdarstellungen von Wechselwirkungsoperatoren

Wie wir im vorangehenden Abschnitt sahen, bewirkt der Reduktionsschritt die Einführung eines Vielteilchenpotentials. Orientiert man sich für das relativistische Dreiteilchenproblem an der Integralgleichungstheorie des nichtrelativistischen Dreiteilchenproblems, d.h. am Faadeev-Formalismus, so wird man auch mit unseren Operatoren die Zerlegung in Kanaloperatoren vornehmen wollen. Notwendig verbunden mit dieser Zerlegung ist die Einführung des Begriffs des Clusters. Diese kann auf verschiedene Art erfolgen. Wir behandeln hier zwei Methoden der Zerlegung für das nichtrelativistische Fermi-Feld und rekapitulieren dazu die "zweite Quantisierung".

Es seien H ein komplexer Hilbertraum und $F(H) := \bigotimes_{n=0}^{\infty} H^{n}$ der Fockraum mit $H^{(0)} := \mathbb{C}$ und $H^{(n)} := \bigotimes_{i=1}^{n} H$. Für $n > 0$ und festes $f \in H$, aber beliebige $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2 \otimes \ldots \otimes \Phi_n \in H^{n}$ definieren wir folgenden Operator:

$$a^{-}(f)\Phi := (f, \Phi_1)\, \Phi_2 \otimes \Phi_3 \otimes \ldots \otimes \Phi_n .$$

Zufolge der Linearität des Skalarproduktes ist die Fortsetzung von $a^{-}(f)$ auf endliche Linearkombinationen solcher Φ wohldefiniert. Wegen $\|a^{-}(f)\Phi\| \leq \|f\| \cdot \|\Phi\|$ auf einem dichten Unterraum ist $a^{-}(f)$ ein wohldefinierter beschränkter Operator von $H^{(n)}$ in $H^{(n-1)}$. Für $n = 0$ definieren wir:

$$a^{-}(f): \mathbb{C} \longrightarrow \{0\}.$$

Die Adjungierte $a^{-}(f)^{*}$ ist sodann die Abbildung von $H^{(n)}$ in $H^{(n+1)}$, gegeben durch $a^{-}(f)^{*}\Phi = f \otimes \Phi$. Nun seien A_n die Antisymmetrisierungsoperatoren auf $H^{(n)}$ und $A := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$, $A_n H^{(n)} =: H_A^{(n)}$, $A\,F(H) =: F_A(H)$. Von $H_A^{(n)}$ sprechen wir als dem antisymmetrischen n-Teilchen-Unterraum von $F_A(H)$.

$$F_0 := \left\{ \Phi \in F_A(H) \mid \Phi = \{\Phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \text{ hat nur endlich viele Kompoenten } \Phi^{(n)} \neq 0 \right\}$$

heißt der Raum der Teilchen-Vektoren.

Wenn A ein hermitescher Operator auf H ist, so definieren wir seine zweite Quantisierung auf $H_A^{(n)}$ so:

$$d\Gamma_n(A) = A \otimes Id \otimes \ldots \otimes Id + Id \otimes A \otimes \ldots \otimes Id + \ldots + Id \otimes \ldots \otimes Id \otimes A$$

Für $A = Id$ erhalten wir den Besetzungszahloperator N, denn

$$n\,\Phi^{(n)} = N\,\Phi^{(n)}$$

Als Vernichtungsoperator $\psi^-(f)$ auf $F_A(H)$ mit Definitionsbereich F_0 definieren wir nun: $\psi^-(f) := \sqrt{N+1}\; a^-(f)$.

Für $\Phi, \Phi' \in F_0$ ergibt sich dann:

$$(\sqrt{N+1}\; a^-(f)\,\Phi, \Phi') = (\sqrt{N+1}\; a^-(f) A\Phi, \Phi')$$

$$= (\Phi, A\, a^-(f)^* \sqrt{N+1}\; \Phi') \cdot \quad ; \text{ deshalb heißt}$$

$$\psi^+(f) := (\psi^-(f))^*|_{F_0} = A\, a^-(f)^* \sqrt{N+1}$$

Erzeugungsoperator.

Es gilt folgende Beziehung: $\frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{i=1}^{n} \psi^+(f_i)\,\Omega = (0,0,\ldots, \overset{n\text{-te Stelle}}{\overset{\downarrow}{\bigotimes_{i=1}^{n}{}_A} f_i}, 0, \ldots)$

Dabei ist $F_0 \ni \Omega := \{1,0,0\ldots\}$ das Vakuum.

Als Beispiel betrachten wir den Fall $H = L^2(M, d\mu)$; dann ist $\bigotimes_{i=1}^{n} L^2(M, d\mu) = L^2(M^n, \bigotimes_{i=1}^{n} d\mu)$ und es gilt:

$$A_n\left(\bigotimes_{i=1}^{n} L^2(M, d\mu)\right) = L^2_A\left(M^n, \bigotimes_{i=1}^{n} d\mu\right) := \left\{f \in L^2\left(M^n, \bigotimes_{i=1}^{n} d\mu\right) \mid A_n f = f\right\}$$

Dann erhalten wir mit den obigen Definitionen:

$$(\psi^-(f)\,\Phi)^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{n+1} \int_M \overline{f(x)}\, \Phi^{(n+1)}(x, x_1, \ldots, x_n)\, d\mu(x)$$

$$(\psi^+(f)\,\Phi)^{(n)}(x_1, \ldots\ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i)\, \Phi^{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Die bis jetzt vorgestellte "zweite Quantisierung" zeichnet zwei Besonderheiten aus:

a) $\{\psi^+(f_1)\dots\psi^+(f_n)\,\Omega \;/\; H \ni f_i$ beliebig, n beliebig$\}$ ist total in $F_A(H)$.

b) $[\psi^-(f), \psi^+(g)]_+ \Phi = (f,g)\,\Phi, \qquad \Phi \in F_0$

Ferner ist sie äquivalent - im Sinne von quadratischen Formen - dem üblichen Vorgehen in der "zweiten Quantisierung".

Nämlich sei $D_S := \{\Phi \in F_0 \,/\, \Phi^{(n)} \in S(\mathbb{R}^{3n})\}$

dann definieren wir für $\Phi \in D_S$:

$$(\psi^-(x)\Phi)^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sqrt{n+1}\;\Phi^{(n+1)}(x, x_1, \dots, x_n).$$

Wiewohl $\psi^-(x)$ als Operator auf $F_A(H)$ mit Definitionsbereich D_S existiert, existiert aber nicht die Adjungierte $\psi^+(x)$, denn sie hätte folgende formale Gestalt:

$$(\psi^+(x)\Phi)^n(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \delta(x - x_i)\, \Phi^{(n-1)}(x_1,\dots,x_{i-1}, x_{i+1},\dots,x_n)$$

Als quadratische Form auf $D_S \times D_S$ ist $\psi^+(x)$ dagegen wohldefiniert; denn sei etwa $\Phi_1 = (0, \Phi^{(1)}, 0, \dots)$ und $\Phi_2 = (0, 0, \Phi^{(2)}, 0 \dots)$ dann gilt:

$$(\Phi_2, \psi^+(x)\,\Phi_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dx_1 \left[\overline{\Phi^{(2)}(x_1, x)}\; \Phi^{(1)}(x_1) - \overline{\Phi^{(2)}(x, x_1)}\; \Phi^{(1)}(x_1) \right].$$

Im Sinne von quadratischen Formen gelten dann die Beziehungen:

$$\psi^-(f) = \int_{\mathbb{R}^3} dx\; \psi^-(x)\, \overline{f(x)}\, dx$$

$$\psi^+(f) = \int_{\mathbb{R}^3} dx\; \psi^+(x)\, f(x)\, dx .$$

Man beachte, daß $(\Phi, \psi^-(x_1)\psi^+(x_2)\,\Phi)$ keinen Sinn ergibt; denn ψ^+ ist eben nur eine quadratische Form; daher rührt denn auch die Wickordnung von gemischten Produkten.

Es seien nun $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $W \in L^2(\mathbb{R}^{(n_1+n_2)})$; dann existiert ein wohldefinierter Operator $H_W^{(n_1,n_2)}$ auf $F_A(H)$, so daß $H_W^{(n_1,n_2)}$ im Sinne von quadratischen Formen folgende Darstellung hat:

$$H_W^{(n_1,n_2)} = \int_{\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)}} dx\,dy\, W(x_1,\ldots,x_{n_1},y_1,\ldots,y_{n_2})\Big(\prod_{i=1}^{n_1}\psi^*(x_i)\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n_2}\psi^-(y_i)\Big)$$

Speziell für $n_1 = n_2$ erhalten wir im n-Teilchenunterraum von $F_A(H)$:

$$(H_W^{n_1}\Phi)^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = A_n \int dy_1\ldots dy_{n_1} W(x_1,\ldots,x_{n_1},y_1,\ldots,y_{n_1})\cdot\Phi^{(n)}(y_1,\ldots,y_{n_1},x_{n_1+1},\ldots,x_n)$$

Vollführen wir den Übergang

$$W(x_1,\ldots,x_{n_1},y_1,\ldots,y_{n_1}) \longrightarrow \delta(x_1-y_1)\ldots\delta(x_{n_1}-y_{n_1})\cdot V(y_1,\ldots,y_{n_1})$$

so geht $(H_W^{n_1}\Phi)^{(n)}$ über in den Ausdruck:

$$(H_W^{n_1}\Phi)^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n_1}=1\\ i_\nu\neq i_\mu}}^{n} V(x_{i_1},\ldots,x_{i_{n_1}})\Phi^{(n)}(x_1,\ldots,x_n),$$

wobei wir V als symmetrisch vorausgesetzt haben.

Für $n_1 = 2$ ergibt sich:

$$(H_W^2\Phi)^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i<j}^{n} V(x_i,x_j)\,\Phi^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$$

$$=: \Big(\sum_{i<j}^{n} V_{ij}\;\Phi^{(n)}\Big)(x_1,\ldots,x_n).$$

Für diese Klasse der Zweiteilchenwechselwirkungen untersuchen wir nun die Einflußnahme der Clusterstruktur.

Die erste Methode ist eine gruppentheoretische Methode:

Es sei $X_n = \dot{\bigcup}_{i=1}^{l} X_i$ eine disjunkte Vereinigung von Teilmengen von $X_n := \{1, 2, \ldots, n\}$. Die Menge $\{X_i / 1 \leq i \leq l\}$ heißt Zerlegung, und jedes ihrer Elemente heißt Cluster. S_{n_i} bezeichne die Gruppe der Permutationen von X_i , S_n die von X_n , und es gelte die Beziehung: $n = \sum_{i=1}^{l} n_i$, n_i die Anzahl der Elemente von X_i .

Dann können wir folgende für die Zerlegung typische Untergruppe definieren:

$$S(n,l) := \{\sigma \in S_n : \sigma|_{X_i} \in S_{n_i} \quad \forall\, 1 \leq i \leq l\}$$

$|S(n,1)|$ bezeichne ihre Ordnung; es gilt dann:

$|S(n,1)| = \prod_{i=1}^{l} n_i!$, und die Anzahl der Links-Rechtsnebengruppen beträgt $\frac{n!}{|S(n,1)|} =: M$. Da S_n die disjunkte Vereinigung aller ihrer Rechtsnebengruppen ist und jede Rechtsnebengruppe durch eine Permutation $E \in S_n$ erzeugt wird, ergibt sich eine Darstellung für S_n in der folgenden Art:

$$S_n = \dot{\bigcup}_{i=1}^{M} S(n,l)\, E_i \,, \quad E_1 = 1, \quad E_i \notin S(n,l)$$

für $1 < i \leq M$. Natürlich sind die E_i nicht eindeutig den $S(n,1)E_i$ zuzuordnen, aber hat man einen Satz $\{E_i\}_{i=1}^{M}$ bestimmt, so bewirkt die Zerlegung von S_n nach von $S(n,1)$ induzierten Rechtsnebengruppen eine Zerlegung des Antisymmetrisators A_n von S_n :

$$A_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S(n)} \chi(\sigma)\sigma = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \dot{\bigcup}_{i=1}^{M} S(n,l)E_i} \chi(\sigma)\sigma = \frac{|S(n,l)|}{n!}\sum_{i=1}^{M} A_{n,l}\, E_i \chi(E_i)$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \chi(E_i)\, A_{n,l}\, E_i$$

dabei ist $A_{n,l}$ der Antisymmetrisator von $S(n,1)$,

Beispiel:

$X_3 = \{1, 2, 3\}$; $X_3 = \{1\} \cup \{2, 3\}$. Dann ist

$S(3, 2) = \{(1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$ und $M = 3$.

Wir wählen $E_1 = (1, 2, 3)$, $E_2 = (2,1,3)$ und $E_3 = (3,1,2)$;

es ist dann $S(3, 2)E_2 = \{(2\,1\,3), (2\,3\,1)\}$

$S(3, 2)E_3 = \{(3\,1\,2), (3\,2\,1)\}$,

und also $S_3 = \bigcup_{i=1}^{3} S(3, 2)E_i$.

Für die Zerlegung von $\Phi^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = A_3\, \Phi\, (x_1, x_2, x_3)$, $\Phi \in H^{(3)}$, ergibt sich daraus:

$$\Phi^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\Phi(x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{2}\Phi(x_1, x_3, x_2)\right]$$

$$+ \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\Phi(x_2, x_1, x_3) + \frac{1}{2}\Phi(x_2, x_3, x_1)\right]$$

$$+ \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(x_3, x_1, x_2) - \frac{1}{2}(x_3, x_2, x_1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\Phi_{E_i}(x_1, x_2, x_3).$$

Die Φ_{E_i} heißen die Kanalwellenfunktionen; sie sind antisymmetrisch in den Clustervariablen.

Dementsprechend resultiert für die Zerlegung von $(H_w^2\, \Phi)^{(3)}$:

$$(H_w^2\, \Phi)^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\left[V(x_2, x_3) + V(x_1, x_3) + V(x_3, x_1)\right]\Phi_{E_1}(x_1, x_2, x_3)$$

$$+ \frac{1}{3}\left[V(x_1, x_3) + V(x_2, x_3) + V(x_1, x_2)\right]\Phi_{E_2}(x_1, x_2, x_3)$$

$$+ \frac{1}{3}\left[V(x_1, x_2) + V(x_2, x_3) + V(x_1, x_3)\right]\Phi_{E_3}(x_1, x_2, x_3)$$

Wir definieren:

$$V(x_2, x_3)\Phi_{E_1}(x_1, x_2, x_3) =: (V_1\, \Phi_{E_1})^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$$

$$[V(x_1,x_3)+V(x_1,x_2)]\,\Phi_{E_\nu}(x_1,x_2,x_3) =: (V^1\Phi_{E_\nu})^{(3)}(x_1,x_2,x_3),$$

und sinngemäß V_2 , V_3 bzw. V^2 , V^3 , so daß wir kurz schreiben können:

$$(H_W^2\Phi)^{(3)}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}\sum_{\nu=1}^{3}[V_\nu+V^\nu]\Phi_{E_\nu}(x_1,x_2,x_3).$$

V_ν heißt die Selbstwechselwirkung des ν-ten Kanals, V^ν das Austauschpotential des ν-ten Kanals.

Der Sinn dieser Zerlegung nach Selbstwechselwirkungen und Austauschpotentialen ist darin zu sehen, daß mit der Faadeev-Theo es möglich ist, ein System von Integralgleichungen für jedes Φ abzuleiten, so daß die Überlagerung $\frac{1}{3}\sum_{\nu=1}^{3}\Phi^{(\pm)}_{E_\nu}$ der einzelnen Lösungsfunktionen (mit $(\pm)$ seien ihre Randbedingungen berücksichtigt) eine asymptotische Lösung der Dreiteilchen-Schrödingergleichung ergibt.

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir eine Zerlegung von $(H_W^2\,\Phi)^{(n)}$ auf folgende Weise:

$$\Phi^n = A_n\Phi = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M}\chi(E_\nu)A_{n,l}E_\nu\Phi =: \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M}\Phi_{E_\nu}$$

$$\Longrightarrow (H_W^2\Phi)^n = \Big(\sum_{i<j}^{n}V_{ij}\Phi\Big)^n = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M}\sum_{i<j}^{n}V_{ij}\Phi_{E_\nu}.$$

Nun gilt: $\Big(\sum_{i<j}^{n}V_{ij}\Phi_{E_\nu}\Big)(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i<j}^{n}V(x_i,x_j)\Phi_{E_\nu}(x_1,\dots,x_n)$

$$= \sum_{i<j}^{n}V(x_{E_\nu(i)},x_{E_\nu(j)})\Phi_{E_\nu}(x_1,\dots,x_n)$$

$$= \Bigg\{\sum_{k=1}^{L}\sum_{i<j}^{n_k}V(x_{E_\nu(i)},x_{E_\nu(j)}) + \sum_{k<m}^{l}\sum_{i}^{n_k}\sum_{j}^{n_m}V(x_{E_\nu(i)},x_{E_\nu(j)})\Bigg\}\Phi_{E_\nu}(x_1,\dots,$$

$$=: (V_\nu + V^\nu) \Phi_{E_\nu}(x_1, \ldots, x_n).$$

Dabei ist zu lesen:

$$\sum_{i<j}^{n_K} := \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j = c_K \\ i \neq j}}^{n_K + c_K}, \quad c_k := \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i\right) + 1,$$

$$\sum_{i}^{n_K} := \sum_{i = c_K}^{n_K + c_K}.$$

V_ν heißt wieder die Selbstwechselwirkung des ν-ten Kanals und V^ν das Austauschpotential des ν-ten Kanals.

Also hat sich ergeben:

$$(H_W^2 \Phi)^{(n)} = \frac{1}{M} \sum^{M} (V_\nu + V^\nu) \Phi_{E_\nu}.$$

Offensichtlich ist diese gruppentheoretisch induzierte Zerlegung anwendbar auch für Mehrteilchenwechselwirkungen von höherer als zweiter Ordnung und übertragbar auf Tensorprodukte von Symmetriegruppen, also auf den Fall verschiedener Systeme von identischen Teilchen.

Einen Nachteil dieser Methode kann man darin sehen, daß sie von der n-Teilchen-Schrödingergleichung ausgeht und so auf dem n-Teilchen-Unterraum $H_A^{(n)}$ von $F_A(H)$ fest liegt. Wir stellen uns deshalb die Frage, wie für ein System identischer Teilchen die Zerlegung nach Selbstwechselwirkung und Austauschpotential der Kanäle mit dem Formalismus der "zweiten Quantisierung" erreicht werden kann: wie muß der gewöhnliche Wechselwirkungsausdruck der "zweiten Quantisierung" geändert werden, um die mit der Schrödingergleichung verträgliche Zerlegung im n-Teilchenunterraum zu

reproduzieren?

$$\left((H_0 + H_W^2)\Phi\right)^{(n)} \longleftrightarrow \; ?$$

$$\left(-\frac{1}{2m}\sum_{i}^{n}\nabla_i + \sum_{i<j}^{n} V_{ij}\right)\Phi^{(n)} \longleftrightarrow \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M}(h_\nu + V^\nu)\Phi_{E_\nu} \quad .$$

Folgende Methode, die auf eine Idee von H. Stumpf zurückgeht, führt zum Ziel:

Es seien $F_A^{(i)}$, $1 \le i \le 1$, antisymmetrische Fockräume und $\psi_i^{\pm}(f_i)$ die zugehörigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, wobei die f_i aus den Einteilchenunterräumen H_i von $F_A^{(i)} := F_A(H_i)$ sind.

Wir bilden $\bigotimes_{i=1}^{l} F_A^{(i)}$ und definieren $\widetilde{\psi_i^{\pm}(f_i)} : \bigotimes_{i=1}^{l} F_A^{(i)} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{l} F_A^{(i)}$

durch $\widetilde{\psi_i^{\pm}(f_i)} = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \underset{\text{i-te Stelle}}{\psi_i^{\pm}(f_i)} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$

Für $\bigotimes_{i=1}^{l} F_A^{(i)} \ni \Phi = \bigotimes_{\nu=1}^{l} \Phi_\nu$, $\Phi_\nu \in F_A^{(\nu)}$, ergibt sich sodann $(i \neq j)$:

$$[\widetilde{\psi_i^{\#}(f_i)}, \widetilde{\psi_j^{\#}(f_j)}]_+ \Phi = 0 \qquad (\# := +, -)$$

Und für $i = j$ gilt:

$$[\widetilde{\psi_i^{\#}(f_i)}, \widetilde{\psi_i^{\#}(g_i)}]_+ \Phi = \bigotimes_{\nu=1}^{i-1} \Phi_\nu \otimes [\psi_i^{\#}(f_i), \psi_i^{\#}(g_i)]_+ \Phi_i \otimes \bigotimes_{\nu=i+1}^{l} \Phi_\nu \quad .$$

Nun ist $H_{W,k}^2 = \int dx\,dx'\, V_k(x,x')\, \psi_k^+(x)\, \psi_k^+(x')\, \psi_k^-(x')\, \psi_k^-(x)$ eine quadratische Form auf $F_A^{(K)}$, so daß wir definieren können:

$$d\Gamma_1(H_W^2) := H_{W,1}^2 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes H_{W,2}^2 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes H_{W,l}^2 ;$$

Dieser Operator entspricht der Selbstwechselwirkung der Kanäle.
Und

$$\sum_{k<m}^{l} V_{km} := \sum_{k<m}^{l} \int dx\, dx'\, V_{km}(x,x')\, \widetilde{\psi_k^+(x)}\ \widetilde{\psi_k^-(x)}\ \widetilde{\psi_m^+(x')}\ \widetilde{\psi_m^-(x')}$$

definieren wir als Operator des Austauschpotentials. Dabei ist

$V_k \in H_k \otimes_s H_k$, $V_{km} \in H_k \otimes_s H_m$. Wir setzen:

$\widetilde{H_W^2} = d\Gamma_l(H_W^2) + \sum_{k<m} V_{km}$. Sei nun $n = \sum_{k=1}^{l} n_k$

Unter $\widetilde{\phi^{(n_k)}}$ verstehen wir den Vektor

$(0,0,\ldots,\phi^{(n_k)},0\ldots.) \in F_A^{(k)}$ und definieren:

$\phi^{\{n_k\}} := \bigotimes_{k=1}^{l} \widetilde{\phi^{(n_k)}}$.

Für solche $\phi^{\{n_k\}} \in \bigotimes_{k=1}^{l} F_A^{(k)}$ ergibt sich:

$$\widetilde{H_W^2}\,\phi^{\{n_k\}} = \sum_{k=1}^{l} \widetilde{\phi^{(n_1)}} \otimes \ldots \otimes H_{W,k}^2\, \widetilde{\phi^{(n_k)}} \otimes \ldots \otimes \widetilde{\phi^{(n_l)}}$$

(k-te Stelle)

$$+ \sum_{k<m}^{l} \int dx\, dx'\, V_{km}(x,x')\, \widetilde{\phi^{(n_1)}} \otimes \ldots \otimes (\psi_k^+(x)\,\psi_k^-(x)\ \widetilde{\phi^{(n_k)}}) \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes (\psi_m^+(x')\,\psi_m^-(x')\ \widetilde{\phi^{(n_m)}}) \otimes \ldots \otimes \widetilde{\phi^{(n_l)}}.$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \widetilde{\phi^{(n_1)}} \otimes \ldots \otimes (H_{W,k}^2\, \widetilde{\phi^{(n_k)}})^{\widetilde{(n_k)}} \otimes \ldots \otimes \widetilde{\phi^{(n_l)}} + \sum_{k<m}^{l} \int dx\, dx'\, V_{km}(x,x')\, \widetilde{\phi^{(n_1)}} \otimes \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \otimes (\psi_k^+(x)\,\psi_k^-(x)\,\widetilde{\phi^{(n_k)}})^{\widetilde{(n_k)}} \otimes \ldots \otimes (\psi_m^+(x')\,\psi_m^-(x')\,\widetilde{\phi^{(n_m)}})^{\widetilde{(n_m)}} \otimes \ldots \otimes \widetilde{\phi^{(n_l)}}.$$

Nun sei j folgende Abbildung: $\phi^{\{n_k\}} \longrightarrow \bigotimes_{k=1}^{l} \phi^{(n_k)}$.

Wenn $F_A^{\{n_\kappa\}} := lin\{ \Phi^{\{n_\kappa\}} \varepsilon \bigotimes_{\kappa=1}^{l} F_A^{(k)} \}$, so ist also j eine lineare Isometrie von $F_A^{\{n_\kappa\}}$ auf $\bigotimes_{\kappa=1}^{l} H_A^{(n_\kappa)}$, und wir erhalten wegen $\widetilde{H_W^2}\, \Phi^{\{n_\kappa\}} \varepsilon F_A^{\{n_\kappa\}}$:

$$j(\widetilde{H_W^2}\, \Phi^{\{n_\kappa\}}) = \sum_{k=1}^{l} \Phi^{(n_1)} \bullet \cdots \bullet (H_{W,k}^2\, \widetilde{\Phi^{(n_\kappa)}})^{(n_\kappa)} \bullet \cdots \bullet \Phi^{(n_l)}$$

$$+ \sum_{k<m}^{l} \int dx\, dx'\, V_{km}(x,x')\, \Phi^{(n_1)} \bullet \cdots \bullet (\psi_k^+(x)\, \psi_k^-(x)\, \widetilde{\Phi^{(n_\kappa)}})^{(n_\kappa)} \bullet \cdots \cdots$$

$$\cdots \bullet (\psi_m^+(x')\, \psi_m^-(x')\, \widetilde{\Phi^{(n_m)}})^{(n_m)} \bullet \cdots \bullet \Phi^{(n_l)}$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \Phi^{(n_1)} \bullet \cdots (\sum_{i<j}^{n_\kappa} V_{ij}^{(k)})\, \Phi^{(n_\kappa)} \bullet \cdots \bullet \Phi^{(n_l)} + \sum_{k<m}^{l} \sum_{i}^{n_\kappa} \sum_{j}^{n_m} V_{ij}^{(km)}\, \Phi^{(n_1)} \bullet \cdots$$

$$\cdots \bullet \Phi^{(n_\kappa)} \bullet \cdots \bullet \Phi^{(n_m)} \bullet \cdots \bullet \Phi^{(n_l)} .$$

Selbstverständlich gilt diese Beziehung für <u>alle</u> $\Phi \varepsilon F_A^{\{n_\kappa\}}$ auch.

Unter der Voraussetzung, daß $H_i = H$ für alle $1 \le i \le l$ und daß die Zweiteilchenpotentiale $V^{(k)}$, $V^{(km)}$ identisch sind, ergibt sich also

$$j(\widetilde{H_W^2}\, \Phi^{\{n_\kappa\}}) = (V_1 + V^1)\, \Phi_{E_1} \quad , \quad \Phi_{E_1} = j(\Phi^{\{n_\kappa\}})$$

Diese Relation überträgt sich auf beliebige Kanäle; denn es gil jetzt mit den angegebenen Voraussetzungen:

$$\bigotimes_{\kappa=1}^{l} H_A^{(n_\kappa)} = (\bigotimes_{\kappa=1}^{l} A_{n_\kappa})\, (\bigotimes_{\kappa=1}^{l} H^{(n_\kappa)}) = A_{n,l}\, F^{(n)} \qquad , \text{ al}$$

ist $j\, \Phi^{\{n_\kappa\}} \varepsilon A_{n,l}\, F^{(n)}$.

Wegen $A_n = A_n^*$ hat man

$$A_n = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{M} \chi(E_\nu) E_\nu^{-1} A_{n,l} := C \circ A_{n,l}$$

$C : \bigotimes_{k=1}^{l} H_A^{(n_k)} \longrightarrow H_A^{(n)}$ hat folgende Eigenschaften:

a) C ist surjektiv, aber nicht injektiv;

b) $C^2 = C$;

denn sei $f \in \bigotimes_{k=1}^{l} H_A^{(n_k)}$; dann ist $Cf := f_A \in H_A^{(n)}$ und

$$C f_A = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{M} \chi(E_\nu) E_\nu^{-1} f_A = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{M} |\chi(E)_\nu| f_A = f_A .$$

Also ist C eine partielle Isometrie. Daraus folgt:

$$C \circ j \widetilde{H_W^2} \Phi^{\{n_k\}} = C(V_1 + V^1) \Phi_{E_1} = (V_1 + V^1) C \Phi_{E_1}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{M} (V_\nu + V^\nu) \Phi_{E_\nu} = H_W^2 \Phi^{(n)}, \text{ mit } \Phi^{(n)} := C \Phi_{E_1} .$$

denn $[C, \sum_{i<j}^{n} V_{ij}]_- \Phi_{E_1} = 0$.

Da Cj wieder eine partielle Isometrie ist, können wir die anfangs aufgeworfene Frage kurz so beantworten:

Die Einschränkung $\widetilde{H_W^2} \big|_{F_A^{\{n_k\}}}$ von $\widetilde{H_W^2} : \bigotimes_{k=1}^{l} F_A^{(k)} \longrightarrow \bigotimes_{k=1}^{l} F_A^{(k)}$ auf $F_A^{\{n_k\}}$ ist partiell isometrisch zu der Einschränkung $H_W^2 \big|_{H_A^{(n)}}$ von $H_W^2 : F(H) \longrightarrow F(H)$ auf $H_A^{(n)}$.

$$\begin{array}{ccc} ([H_0 + H_W^2]\Phi)^{(n)} & \longleftarrow Cj \longrightarrow & [\widetilde{H_0} + \widetilde{H_W^2}]\Phi^{\{n_k\}} \\ \updownarrow & & \updownarrow Cj \\ (-\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n} \nabla_i + \sum_{i<j}^{n} V_{ij})\Phi^{(n)} & \longrightarrow & \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M} (h_\nu + V^\nu)\Phi_{E_\nu} . \end{array}$$

Einen Vorteil bietet die Stumpf'sche Methode gegenüber der gruppentheoretischen Methode also immer dann, wenn man die Gesamtteilchenzahl n nicht festlegen will und mit $\widetilde{H_W^2}$ arbeiten will. Erst durch die Einschränkung auf einen Unterraum bestimmten Typs von $\bigotimes_{k=1}^{L} F_A^{(k)}$ wird die Gesamteilchenzahl festgelegt. In diesem Sinne ist die Stumpf'sche Methode eine typische Methode der "zweiten Quantisierung", oder besser gesagt, einer "verallgemeinerten zweiten Quantisierung".

III. Relativistische Kanalgleichungen

Da die Überlegungen des Kapitels II den Hilbertraum H nicht spezifizieren, sind sie übertragbar auf relativistische Fockraum-Konstruktionen, wie sie z.B. in /16/ für das Klein-Gordon-Feld und in /17/ für das Dirac-Feld durchgeführt sind.

In unserem Fall ist H ein funktionaler Hilbertraum und $F_A(H)$ ein funktionaler, antisymmetrischer Fockraum. Die im vorigen Abschnitt entwickelten Bezeichnungen behalten wir bei, nur die Erzeugungsoperatoren bezeichnen wir jetzt mit $j(x)$ und die Vernichtungsoperatoren mit $\delta(x)$.

Bevor wir die Zerlegung entsprechend dem Stumpf'schen Verfahren durchführen, symmetrisieren wir die Gleichung $O(j,\vartheta)\Phi^{(s)} = 0$ indem wir $S(j) := \int dx \, {}_\mu\gamma_{\alpha\alpha} \delta^\mu(x) j_\alpha(x)$ auf sie anwenden; wir erhalten

$$\Big(\int dx \, \Box(x) j_\alpha(x) \vartheta_\alpha(x) + \int dx \, {}_\mu\gamma_{\alpha\alpha} \delta^\mu(x) \Big\{ 3 V_\alpha^{\beta\gamma\delta} j_\alpha(x) F_{\beta\iota} * j_\iota(x) \vartheta_\gamma(x) \vartheta_\delta(x)$$

$$+ V_\alpha^{\beta\gamma\delta} j_\alpha(x) F_{\delta m} * j_m(x) \vartheta_\beta(x) \vartheta_\gamma(x) \Big\} + \dots \Big) \Phi^{(s)} = 0$$

Die mit ... angedeuteten Glieder enthalten die Ausdrücke mit drei Erzeugern j und drei Vernichtern ϑ ; wir werden sie im folgenden nicht mehr berücksichtigen.

Dann lauten bei Benutzung der Stumpf'schen Methode die Selbstwechselwirkungsoperatoren der Kanäle so:

$$d\Gamma_\iota \left(S(j) O(j,\vartheta) \right) = \sum_{k=1}^{\perp} \int dx \, \Box(x) \widetilde{j_\alpha^{*(k)}(x)} \widetilde{\vartheta_\alpha^{(k)}(x)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\perp} \int dx \, {}_\mu\gamma_{\alpha\alpha} \delta^\mu(x) \Big\{ 3 V_\alpha^{\beta\gamma\delta} \widetilde{j_\alpha^{(k)}(x)} \widetilde{F_{\beta\iota} * j_\iota^{(k)}(x)} \widetilde{\vartheta_\gamma^{(k)}(x)} \widetilde{\vartheta_\delta^{(k)}(x)}$$

$$+ V_\alpha^{\beta\gamma\delta} \widetilde{j_\alpha^{(k)}(x)} \widetilde{F_{\delta m} * j_m^{(k)}(x)} \widetilde{\vartheta_\beta^{(k)}(x)} \widetilde{\vartheta_\gamma^{(k)}(x)} \Big\} \, .$$

und die Austauschpotentiale:

$$\sum_{k<m}^{\perp} V = \sum_{k<m}^{\perp} \int dx\, {}_{\mu}\gamma_{\alpha\alpha'}\, \delta^{\mu}(x) \left\{ 3 V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} \widetilde{j_{\alpha}^{(k)}(x)}\, \widetilde{\vartheta_{\delta}^{(k)}(x)}\, \widetilde{F_{\beta\iota}} * \widetilde{j_{\iota}^{(m)}(x)}\, \widetilde{\vartheta_{\gamma}^{(m)}(x)} \right.$$

$$\left. + V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} \widetilde{j_{\alpha}^{(k)}(x)}\, \widetilde{\vartheta_{\gamma}^{(k)}(x)}\, F_{\delta\iota} * \widetilde{j_{\iota}^{(m)}(x)}\, \widetilde{\vartheta_{\beta}^{(m)}(x)} \right\}$$

Für die Selbstwechselwirkungsoperatoren $d\Gamma_i(S(j)O(j,\vartheta))$ machen wir nun die Approximation rückgängig und verwenden die theoretisch richtigen Operatoren $d\Gamma_i(S(j)Q_c(j,\vartheta))$, so daß die Approximation der Neumann-Entwicklung nur in den Austauschpotentialen zur Geltung kommt. Andererseits wollen wir für $d\Gamma_i(S(j)Q_c(j,\vartheta))$ eine asymptotische Approximation vornehmen; dazu sei $\Phi^{(S_K)} = \bigotimes_{k=1}^{l} \Phi^{(S_K)}$. Wir benutzen dann statt $S(j)Q_c(j,\vartheta)\Phi^{(S_K)}$ folgenden Clusterzustand:

$$\int dx\, P\Big[\sum_{i=1}^{n_K} \Box(x_i) + \mu_K^2\Big]\, \varphi_{S_K}(x_{C_K+1}, \ldots, x_{C_K+n_K})\, D^{(S_K)}(x_{C_K+1}, \ldots, x_{C_K+n_K})$$

wobei wir Spinorindizes unterdrückt haben. Dabei ist P ein Polynom und $\mu_K^2 = \sum_{i}^{n_K} m_i^2$; wir werden $P = Id$ verwenden. Diese Approximation setzt eine Lösungstheorie der Heisenberggleichung für jeden Cluster voraus; ganz allgemein gilt, daß der fouriertransformierte Ausdruck zu $S(j)Q_c(j,\vartheta)\Phi^{(S_K)}$ ein Polynom im Viererimpuls p enthält, dessen Nullstellen das Massenspektrum des Clusters repräsentieren. Zerlegt man dieses Polynom nach dem Fundamentalsatz der Algebra und transformiert zurück, so entsteht der oben angeführte Ausdruck. Durchgeführt worden sind bisher Berechnungen für die Massen von Nukleonen /18/ und skalaren Mesonen und Vektormesonen /19/.

Als Einstieg in diese Problematik behandeln wir zuerst das Zweiteilchenproblem und diskutieren die zugeordnete Lippmann-Schwinger-Gleichung bzw. ihr relativistisches Analogon.

A. Das relativistische Analogon der Lippmann-Schwinger-Gleichung

Die Besonderheit der reduzierten und symmetrisierten dynamischen Gleichung besteht darin, daß alle auftretenden Produkte von Erzeugungsoperatoren j und Vernichtungsoperatoren $\hat{\jmath}$ am gleichen Ort x zu betrachten sind; gegenüber den nicht-relativistischen Verhältnissen ergibt sich daraus ein besonderes Verhalten unter der Fouriertransformation.

Es sei $f \in H \bullet H$; dann ist die Fouriertransformation eine unitäre Transformation auf $H \bullet H$ (Satz von Plancharel) und es besteht die Beziehung:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp_1 dp_2 \exp[-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)]\, \hat{f}(p_1, p_2) .$$

Für den Übergang auf Schwerpunktskoordinaten definieren wir die Abbildung

$$T: \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^8 , \ (x_1, x_2) \longrightarrow (x_s, x_r) := \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_1 - x_2\right),$$

oder in Matrixdarstellung: $T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Mittels der Transponierten $T^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ von T definieren wir dann:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_s \\ p_r \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Es sei $H_s \bullet H_r := \{ f_T := f_o T^{-1} \mid f \in H \bullet H \}$ und die Abbildung $I : H \bullet H \longrightarrow H_s \bullet H_r$ gegeben durch $f \longrightarrow f_T$; dann ist die Adjungierte $I^* : H_s \bullet H_r \longrightarrow H \bullet H$ die Abbildung $g \longrightarrow g_{T^*}$.

Zwischen $\hat{f}$ und $\widehat{f_T}$, der Fouriertransformierten in Schwerpunktskoordinaten von f_T , besteht der folgende Zusammenhang:

$$(I^*)^{-1} \hat{f} = - \widehat{If} = - \widehat{f_T} .$$

Denn wegen $p_1x_1 + p_2x_2 = p_s x_s + p_r x_r$ und $\det T = -1$ gilt:

$$((I^*)^{-1}\hat{f})(p_s,p_r) = (\hat{f})_{(T^*)^{-1}}(p_s,p_r) = \hat{f}\circ T^*(p_s,p_r) = \hat{f}(p_1,p_2)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int dx_1\,dx_2\ \exp[i(p_1x_1 + p_2x_2)]\ f(x_1,x_2)$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int dx_s\,dx_r\ \exp[i(p_s x_s + p_r x_r)]\ f_T(x_s,x_r)$$

$$= -\hat{f}_T(p_s,p_r)\,.$$

Damit ergibt sich folgender Transformationszusammenhang:

$$\begin{array}{ccc} H\bullet H \ni f & \xrightarrow{\ I\ } & f_T \in H_s\bullet H_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ H\bullet H \ni \hat{f} & \xrightarrow{\ -(I^*)^{-1}\ } & \hat{f}_T \in H_s\bullet H_r \end{array}$$

Damit und mit der Relation $p_1^2 + p_2^2 = \frac{1}{2}p_s^2 + 2p_r^2$ bekommen wir:

$$\{[\Box_1 + \Box_2]f\}\hat{}\,(p_1,p_2) = (-p_1^2 - p_2^2)\hat{f}(p_1,p_2)$$

$$= (\tfrac{1}{2}p_s^2 + 2p_r^2)\hat{f}_T(p_s,p_r) = \{[-\tfrac{1}{2}\Box_s - 2\Box_r]f_T\}\hat{}\,(p_s,p_r)$$

Daraus folgt:

$$[\Box_1 + \Box_2]f_T(x_1,x_2) = 0 \iff [\tfrac{1}{2}\Box_s + 2\Box_r]f_T(x_s,x_r) = 0$$

Als nächstes betrachten wir die Gleichung:

$$[\Box_1 + m_1^2 + \Box_2 + m_2^2]\, f(x_1, x_2) - V(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) = 0 \,,$$

wobei V ein skalares Potential sei, $V \in H \otimes H$. Hierzu gehört:

$$[\frac{1}{2}(\Box_s + m_s^2) + 2(\Box_r + m_r^2)]\, f_T(x_s, x_r) - V_T \cdot f_T(x_s, x_r) = 0$$

Im Impulsraum haben diese Gleichungen die Gestalt:

$$[-p_1^2 + m_1^2 - p_2^2 + m_2^2]\, \hat{f}(p_1, p_2) - \frac{1}{(2\pi)^4} \hat{V} * \hat{f}(p_1, p_2) = 0 \,,$$

$$[\frac{1}{2}(p_s^2 - m_s^2) + 2(p_r^2 - m_r^2)]\, \hat{f}_T(p_s, p_r) + \frac{1}{(2\pi)^4} \hat{V}_T * \hat{f}_T(p_s, p_r) = 0$$

Dabei haben wir in den letzten Zeilen von folgender on-Shell-Relation Gebrauch gemacht:

$$2 p_1 p_2 = p_s^2 - p_1^2 - p_2^2 = m_s^2 - m_1^2 - m_2^2$$

$$= 2(\frac{p_s}{2} + p_r)(\frac{p_s}{2} - p_r) = \frac{p_s^2}{2} - 2p_r =: \frac{m_s^2}{2} - 2m_r^2 \,,$$

daraus folgt: $2\, m_r^2 := m_1^2 + m_2^2 - \frac{1}{2} m_s^2$.

Für den Fall, daß V ein translationsinvariantes Potential ist, entsteht die Gleichung:

$$[\frac{1}{2}(\Box_s + m_s^2) + 2(\Box_r + m_r^2)]\, f_T(x_s, x_r) - V(x_r) f_T(x_s, x_r) = 0$$

Wenn $V \in H_r$ ist, ergibt sich durch Fouriertransformation:

$$[\frac{1}{2}(p_s^2 - m_s^2) + 2(p_r^2 - m_r^2)]\, \hat{f}_T(p_s, p_r) + \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V} *_r \hat{f}_T(p_s, p_r) = 0 \,;$$

dabei ist $\tilde{V}(p_r) := \int dx_r \exp[ip_r x_r] V(x_r)$

und $\tilde{V} *_r \hat{f}_T(p_s, p_r) := \int dq_r \tilde{V}(p_r - q_r) \hat{f}_T(p_s, q_r)$.

Nun ist $V_T(x_s, x_r) = 1(x_s) V(x_r)$; d.h. $V_T \notin H_s \otimes H_r$, son
dern $V_T \in S'(\mathbb{R}^4) \otimes H_r$. Da die Fouriertransformation sich
deutig fortsetzen läßt auf $S'(\mathbb{R}^4)$, genügt es wegen $V \in H_r$
sicher, wenn $f_T \in S'(\mathbb{R}^4) \otimes H_r$ ist. Andererseits sollte d
Beziehung $\widehat{V_T f_T} = \frac{1}{(2\pi)^4} \widehat{V_T} * \widehat{f_T}$ ihre Gültigkeit behalten; wege
$\widehat{V_T} = \tilde{1} \otimes_s \tilde{V}$ muß bezüglich der Variablen p_s die Konvol
tion mit einer Distribution erklärt sein; sie ist es, wenn
$\widehat{f_T} \in S(\mathbb{R}^4) \otimes H_r$. Also ist auch $f_T \in S(\mathbb{R}^4) \otimes H_r$.

Die Gleichung im Impulsraum ist erfüllbar, wenn der Träger von
$\widehat{f_T}$ bezüglich der Variablen p_s auf der Massenschale liegt; a
liegt es nahe, folgende Abbildung R zu definieren:

$$R: S(\mathbb{R}^4) \otimes H_r \longrightarrow S(H_{m_s}) \otimes H_r$$

$$f_T \longrightarrow \widehat{f_T}|_{H_{m_s} \times \mathbb{R}^4} =: \widehat{f_{T_0}}$$

mit $H_{m_s} := \{p \in \mathbb{R}^4 : p_s^2 - m_s^2 = 0,\ p_0 > 0\}$

Denn jetzt gilt: $R\left[\frac{1}{2}(\Box_s + m_s^2) f_T\right] = 0$, d.h. wir erhalt
im Impulsraum die Gleichung:

$$2(\Box_r + m_r^2) \widehat{f_{T_0}}(p_s, p_r) + \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V} *_r \widehat{f_{T_0}}(p_s, p_r) = 0.$$

Für die Berechnung von $\widehat{V_T f_T}$ haben wir folgenden Satz /16,
Theorem IX.5/ benutzt:

Es sei $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $g \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\widehat{fF}$ eine
polynominal beschränkte C^∞ - Funktion, und es gilt:

$$\widehat{fF}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{F} * \hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} F(e^{ikx} f).$$

Das unterstrichene $\underline{x}$ bedeutet, daß über x integriert wird. Daraus folgt:

$$\widehat{V_T f_T}(p_s, p_r) = \frac{1}{(2\pi)^4} \widehat{V_T} \bullet \widehat{f_T}(p_s, p_r) = \frac{1}{(2\pi)^4} [\tilde{f}_s \bullet \tilde{V}] \bullet \widehat{f_T}(p_s, p_r)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{f}_s \bullet_s \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V} \bullet_r \widehat{f_1}\right)(p_s, p_r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V} \bullet_r \widehat{f_1}(p_s, p_r),$$

und umso mehr: $R(V_T f_1)(p_s, p_r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V} \bullet \widehat{f_{1_0}}(p_s, p_r)$.

Da $\widehat{f_{1_0}} \in S(H_{m_s}) \bullet H_r$, existiert die Abbildung

$$L: S(H_{m_s}) \bullet H_r \longrightarrow H_r, \widehat{f_{1_0}} \longrightarrow \int dp_s \widehat{f_{1_0}}(p_s).$$

Weil diese Abbildung surjektiv und beschränkt ist, entsteht die Gleichung ($\tilde{\varphi} := L \widehat{f_{1_0}}$) :

$$2(p_r^2 + m_r^2) \tilde{\varphi}(p) + \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V} \bullet \tilde{\varphi}(p_r) = 0, \quad \tilde{\varphi} \in H_r .$$

Offenbar ist $L \circ R$ die Abbildung, die die Separation des Schwerpunkts bewirkt.

Wenden wir uns nun unserer Feldgleichung zu; für $\varsigma = 2$ lautet unsere Funktionalgleichung in der besprochenen asymptotischen Näherung:

$$\left\{ \int dx \, [\Box_1 + m_1^2] \widetilde{j_\alpha^{(1)}(x)} \widetilde{\vartheta_\alpha^{(1)}(x)} + \int dx \, [\Box_2 + m_2^2] \widetilde{j_\alpha^{(2)}(x)} \widetilde{\vartheta_\alpha^{(2)}(x)} \right\} \circ^{\{1,1\}}$$

$$= - \int dx \, \gamma_{\mu\alpha\alpha} \cdot \delta^\mu(x) \, [3 V_\alpha^{\beta\gamma\delta} \widetilde{j_\alpha^{(1)}(x)} \widetilde{\vartheta_\beta^{(1)}(x)} \widetilde{F_{\beta\iota} \bullet j_\iota^{(2)}(x)} \widetilde{\vartheta_\gamma^{(2)}(x)}$$

$$+ V_\alpha^{\beta\gamma\delta} \widetilde{j_\alpha^{(1)}(x)} \widetilde{\vartheta_\gamma^{(1)}(x)} \widetilde{F_{\delta\eta} \bullet j_\eta^{(2)}(x)} \widetilde{\vartheta_\beta^{(2)}(x)}] \circ^{\{1,1\}}$$

Vermöge der partiellen Isometrie j , die wir zu Ende des Kapitels II definiert hatten, erhalten wir die Gleichung:

$$\int dx_1 dx_2 \left[\Box_1 + m_1^2 + \Box_2 + m_2^2\right] \varphi(x_1\alpha_1; x_2\alpha_2 \mid a) D(x_1\alpha_1 \mid x_2, \alpha_2)$$

$$= -\int dx \int dx' \, {}_\mu\gamma_{\alpha\alpha'} \delta^\mu(x) \, 3 V_\alpha^{\beta\gamma\delta} F_{\beta\iota}(x - x') \varphi(x\delta; x\gamma \mid a) D(x\alpha \mid x'\iota)$$

$$- \int dx \int dx' \, {}_\mu\gamma_{\alpha\alpha'} \delta^\mu(x) \, V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} F_{\delta\eta}(x - x') \varphi(x\gamma; x\beta \mid a) D(x\alpha \mid x'\eta)$$

Dabei haben wir gesetzt: $D(x \mid y) := D(x) \bullet D(y)$

Jetzt vergleichen wir beide Seiten der Gleichung bezüglich des Tupels $(x_1, \alpha_1; x_2, \alpha_2)$ und erhalten:

$$\left[\Box_1 + m_1^2 + \Box_2 + m_2^2\right] \varphi(x_1\alpha_1; x_2\alpha_2 \mid a) =$$

$$- {}_\mu\gamma_{\alpha_1\alpha'} \delta^\mu(x_1) \, 3 V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(x_1 - x_2) \varphi(x_1\delta; x_1\gamma \mid a)$$

$$- {}_\mu\gamma_{\alpha_1\alpha'} \delta^\mu(x_1) \, V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} F_{\delta\alpha_2}(x_1 - x_2) \varphi(x_1\gamma; x_1\beta \mid a) .$$

In der ersten Zeile der rechten Seite vertauschen wir γ mit δ , was zufolge der Antisymmetrie des Vertex V bewirkt:

$$\left[\Box_1 + m_1^2 + \Box_2 + m_2^2\right] \varphi(x_1\alpha_1, x_2\alpha_2 \mid a) =$$

$${}_\mu\gamma_{\alpha\alpha'} \delta^\mu(x_1) \, 3 V_\alpha^{\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(x_1 - x_2) \varphi(x_1\gamma, x_1\delta \mid a)$$

$$- {}_\mu\gamma_{\alpha_1\alpha'} \delta^\mu(x_1) \, V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} F_{\delta\alpha_2}(x_1 - x_2) \varphi(x_1\gamma, x_1\beta \mid a) .$$

Offensichtlich läßt sich für diese Gleichung nicht der Schwerpunkt separieren in der Form, wie wir es weiter vorn in diesem Kapitel getan haben.

Fouriertransformation ergibt:

$$[-p_1^2 + m_1^2 - p_2^2 + m_2^2]\,\hat{\varphi}(p_1\alpha_1; p_2\alpha_2 \mid a) =$$

$$= -\gamma_{\mu\alpha_1\alpha'} p_1^\mu\, 3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} \int dx_1 dx_2 \exp[i(p_1x_1 + p_2x_2)]\, F_{\beta\alpha_2}(x_1 - x_2)\varphi(x_1\gamma; x_1\delta \mid a)$$

$$+ \gamma_{\mu\alpha_1\alpha'} p_1^\mu\, V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} \int dx_1 dx_2 \exp[i(p_1x_1 + p_2x_2)]\, F_{\delta\alpha_2}(x_1 - x_2)\varphi(x_1\gamma; x_1\beta \mid a)$$

$$= + \gamma_{\mu\alpha_1\alpha} p_1^\mu\, 3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} \int dx_1 dx_2 \exp[i(p_1x_2 + p_2x_1)]\, F_{\alpha_1\beta}(x_1 - x_2)\varphi(x_2\gamma; x_2\delta \mid a)$$

$$- \gamma_{\mu\alpha_1\alpha} p_1^\mu\, V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} \int dx_1 dx_2 \exp[i(p_1x_2 + p_2x_1)]\, F_{\alpha_1\delta}(x_1 - x_2)\varphi(x_2\gamma; x_2\beta \mid a)$$

Zuletzt haben wir unter dem Integral x_1 mit x_2 vertauscht und die Antisymmetrie von F benutzt.

Nun führen wir neue Variablen ein, $x_1' := x_1 - x_2$ und $x_2' := x_2$, und erhalten:

$$[-p_1^2 + m_1^2 - p_2^2 + m_2^2]\,\hat{\varphi}(p_1\alpha_1, p_2\alpha_2 \mid a) =$$

$$-\gamma_{\mu\alpha\alpha'} p_1^\mu\, 3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} \int dx_1' dx_2' \exp[i(p_1 + p_2)x_2' + ip_2x_1']\, F_{\alpha_1\beta}(x_1')\varphi(x_2'\gamma, x_2'\delta \mid a)$$

$$\gamma_{\mu\alpha\alpha'} p_1^\mu\, V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta} \int dx_1' dx_2' \exp[i(p_1 + p_2)x_2' + ip_2x_1']\, F_{\alpha_1\delta}(x_1')\varphi(x_2'\gamma, x_2\beta \mid a)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{2}(p_s^2 - m_s^2) + 2(p_r^2 - m_r^2)\right]\widehat{\varphi_\Gamma}(p_s,\alpha_1;p_r,\alpha_2\,|\,a) =$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_1\alpha'}\left(\frac{p_s}{2}+p_r\right)^\mu 3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\,\widetilde{F}_{\alpha_2\beta}\left(\frac{p_s}{2}-p_r\right)\int dx_2'\exp\left[ip_s x_2'\right]\varphi_\Gamma(x_2',\gamma;0,\delta\,|\,a)$$

$$+\gamma_{\mu\alpha_2\alpha'}\left(\frac{p_s}{2}+p_r\right)^\mu V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\,\widetilde{F}_{\alpha_1\delta}\left(\frac{p_s}{2}-p_r\right)\int dx_2'\exp\left[ip_s x_2'\right]\varphi_\Gamma(x_2',\gamma;0,\beta\,|\,a)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\widehat{\varphi_\Gamma}(p_s,\alpha_1;p_r,\alpha_2\,|\,a) =$$

$$-g_0(0;p_s,p_r)\,\gamma_{\mu\alpha_1\alpha'}\left(\frac{p_s}{2}+p_r\right)^\mu 3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}F_{\alpha_2\beta}\left(\frac{p_s}{2}-p_r\right)\int dx_2'\,e^{ip_s x_i}\varphi_\Gamma(x_2',\gamma;0,\delta\,|\,a)$$

$$+g_0(0;p_s,p_r)\,\gamma_{\mu\alpha_2\alpha'}\left(\frac{p_s}{2}+p_r\right)^\mu V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\,\widetilde{F}_{\alpha_1\delta}\left(\frac{p_s}{2}-p_r\right)\int dx_2'\,e^{ip_s x_i}\varphi_\Gamma(x_2',\gamma;0,\beta\,|\,a)$$

mit $g_0(z;p_s,p_r) := \left[z - \frac{1}{2}(p_s^2 - m_s^2) - 2(p_r^2 - m_r^2)\right]^{-1}$.

Wir integrieren über die Variable p_r und erhalten:

$$\int dx_s\, e^{ip_s x_s}\varphi_\Gamma(x_s\alpha_1,0\,\alpha_2\,|\,a) =$$

$$C_{\alpha_1\alpha_2}^{\gamma\delta}(0;p_s)\int dx_2'\,e^{ip_s x_i}\varphi_\Gamma(x_2'\gamma,0\delta\,|\,a) + C_{\alpha_1\alpha_2}^{\gamma\beta}(0;p_s)\int dx_2'\,e^{ip_s x_i}\varphi_\Gamma(x_2'\gamma,0\beta\,|\,a)$$

mit $C^{\gamma\delta}_{\alpha_1\alpha_2}(0;p_s) := \int dp_r \left\{ -g_0(0;p_s,p_r)\,\gamma_{\mu\alpha_1\alpha'}\left(\frac{p_s}{2}+p_r\right)^{\mu} 3V^{\beta\gamma\delta}_{\alpha'} \widetilde{F}_{\alpha_2\beta}\left(\frac{p_s}{2}-p_r\right)\right\}$

und $C^{\gamma\beta}_{\alpha_1\alpha_2}(0;p_s) := \int dp_r \left\{ g_0(0;p_s,p_r)\,\gamma_{\mu\alpha_1\alpha'}\left(\frac{p_s}{2}+p_r\right)^{\mu} V^{\beta\gamma\delta}_{\alpha'} \widetilde{F}_{\alpha_2\delta}\left(\frac{p_s}{2}-p_r\right)\right\}$

Äquivalent dazu ist die Gleichung:

$$\widehat{\varphi}_T(p_s\alpha_1, p_r\alpha_2 \mid a) = C^{\gamma\delta}_{\alpha_1\alpha_2}(0;p_s)\,\widehat{\varphi}_T(p_s\gamma, p_r\delta \mid a) + C^{\gamma\beta}_{\alpha_1\alpha_2}(0;p_s)\,\widehat{\varphi}_T(p_s\gamma, p_r\beta \mid a)$$

Wie wir sehen, resultiert eine Feldgleichung, die nur Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren am selben Ort verwendet, in einer reinen, algebraischen Gleichung. Dies ist der Effekt unserer Näherung. Die nächst höhere Näherung enthält schon Ausdrücke der Art $V(x,x')\,\varphi(x,x')$, deshalb wollen wir aus der letzten Gleichung eine Gleichung für die Variable p_r allein machen.

Die Koeffizientenfunktionen $C^{\gamma\delta}_{\alpha_1\alpha_2}$ bzw. $C^{\gamma\beta}_{\alpha_1\alpha_2}$ enthalten eine skalare Funktion S in der Variablen p_s als Faktor und einen Spinorausdruck als Faktor. Zufolge der Gleichung muß $S(p_s) = 1$ sein für jeden Wert von p_s, so daß wir die Koeffizientenfunktionen als reine Spinoroperatoren betrachten können; also können wir o. B. d. A. wieder annehmen, daß $\varphi_T = f \bullet g$ gilt, und wir erhalten:

$$\tilde{g}(p_r,\alpha_1\alpha_2 \mid a) = C^{lm}_{\alpha_1\alpha_2}\,\tilde{g}(p_r,lm \mid a)$$

mit $C^{lm}_{\alpha_1\alpha_2}\tilde{g}(p_r\,lm \mid a) := C^{\gamma\delta}_{\alpha_1\alpha_2}\tilde{g}(p_r\gamma\delta \mid a) + C^{\gamma\beta}_{\alpha_1\alpha_2}\tilde{g}(p_r\gamma\beta \mid a)$.

Die hier abgeleitete Bindungsgleichung ähnelt stark der Bindungsgleichung aus der bekannten Heisenbergrechnung (siehe /20/, S. 455, insbesondere 18.33). Der Unterschied ist, daß wir Massen in der

Resolvente g_o, entsprechend einem abgeänderten Propagator haben Die Ähnlichkeit rührt daher, daß wir - wie in der Heisenbergrech nung auch - die regularisierte Zweipunktfunktion F als Funktio fouriertransformieren und entsprechend die Faltung handbaben. Eine andere, nicht nur algebraische Gleichung resultiert, wenn man F als Distribution und die φ - Funktionen als Testfunk- tionen begreift; darauf gehen wir hier jedoch nicht weiter ein.

Da unsere Näherung schon alle Zweiteilchenoperatorprodukte be- rücksichtigt, bezeichnen wir die Streugleichung

$$\tilde{g}(p_r,\alpha_1\alpha_2|\,a) = \tilde{\delta}(p_r,\alpha_1\alpha_2|\,a) + C^{im}_{\alpha_1\alpha_2}\tilde{g}(p_r,im\,|\,a),$$

in der $\tilde{\delta}$ ein ein-/auslaufender freier Zustand ist, je nachdem, welcher ε - lim in der Resolvente g_o verwendet wird, als re- lativistisches Analogon zur Lippmann-Schwinger-Gleichung.

B. Das relativistische Analogon der Faadeev-Gleichungen

In der Behandlung des Dreiteilchenproblems gehen wir analog zum Zweiteilchenproblem vor und bestimmen zuerst die Gleichung in den Schwerpunktskoordinaten des Impulsraumes.

Es sei wieder $f \in H \otimes H \otimes H$; dann definieren wir die Fourier transformierte $\hat{f}$ von f so:

$$\hat{f}(p_1,p_2,p_3) = \frac{1}{(2\pi)^6}\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,\exp\left[i(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)\right] f(x_1,x_2,x_3)$$

Den Übergang auf Schwerpunktskoordinaten besorgt die Abbildung $T : \mathbb{R}^{12} \longrightarrow \mathbb{R}^{12}$, gegeben durch

$$(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ x_2-x_3,\ x_1-\frac{x_2+x_3}{2}\right) =: (x_s,x_r,x_u)$$

oder in Matrixdarstellung:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad . \text{ Es gilt: } \det T = -1 \ .$$

Einen Vektor des Definitionsbereiches der Adjungierten T^* von T bezeichnen wir mit $(p_s,p_r,p_u)^\top$ und einen Bildvektor von T^* mit $(p_1,p_2,p_3)^\top$.

Dann gilt: $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = \left\langle T^* (p_s,p_r,p_u)^\top \middle| T^{-1}(x_s,x_r,x_u)^\top \right\rangle_{IR^3}$

$= p_sx_s + p_rx_r + p_ux_u$.

Es sei $H_s \bullet H_r \bullet H_u := \left\{ f_T := f \circ T^{-1} \middle| \ f \in H \bullet H \bullet H \right\}$, und I die Abbildung $f \longrightarrow f_T$.

Wie im Zweiteilchenfall ergibt sich die Beziehung:

$(I^*)^{-1}\, \widehat{f} = -\widehat{f_T}$, und damit folgendes Bild:

$$\begin{array}{ccc} H \bullet H \bullet H \ni f & \xrightarrow{\ I\ } & f_T \in H_s \bullet H_r \bullet H_u \\ \downarrow & & \downarrow \\ H \bullet H \bullet H \ni \hat{f} & \xrightarrow{(-I^*)^{-1}} & \widehat{f_T} \in H_s \bullet H_r \bullet H_u \end{array}$$

Wegen $T\,T^* = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$ gilt: $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{1}{3}p_s^2 + 2p_r^2 + \frac{3}{2}p_u^2$;

die zugehörige on-Shell-Relation lautet:

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \frac{1}{3}\, m_s^2 + 2m_r^2 + \frac{3}{2}\, m_u^2 \ .$$

Also bekommen wir wieder die Äquivalenz:

$$[\Box_1 + m_1^2 + \Box_2 + m_2^2 + \Box_3 + m_3^2]\, f(x_1,x_2,x_3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$[\frac{1}{3}(\Box_s + m_s^2) + 2(\Box_r + m_r^2) + \frac{3}{2}(\Box_u + m_u^2)]\, f_T(x_s,x_r,x_u) = 0,$$

Nun betrachten wir die Gleichung

$$[\Box_1 + m_1^2 + \Box_2 + m_2^2 + \Box_3 + m_3^2]\, f(x_1,x_2,x_3) = [V_1(x_2,x_3) + V_2(x_1,x_3) + V_3(x_1,x_2)]\, f(x_1,$$

; die V_i, $1 \leq i \leq 3$, seien skalare und symmetrische Potentiale. Ihr äquivalent ist die Gleichung:

$$\left[\frac{1}{3}(\Box_s + m_s^2) + 2(\Box_r + m_r^2) + \frac{3}{2}(\Box_u + m_u^2)\right] f_T(x_s,x_r,x_u) - [V_{1T}(x_s,x_r,x_u)$$

$$+ V_{2T}(x_s,x_r,x_u) + V_{3T}(x_s,x_r,x_u)]\, f(x_s,x_r,x_u) = 0$$

mit $V_{1T}(x_s,x_r,x_u) := 1(x_1)\, V(x_2,x_3) =: \mathbb{V}_1(x_1,x_2,x_3)$

$V_{2T}(x_s,x_r,x_u) := 1(x_2)\, V_2(x_1,x_3) =: \mathbb{V}_2(x_1,x_2,x_3)$

$V_{3T}(x_s,x_r,x_u) := 1(x_3)\, V_3(x_1,x_2) =: \mathbb{V}_3(x_1,x_2,x_3)$

Also erhalten wir im Impulsraum die Äquivalenz:

$$[-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2]\, \hat{f}(p_1,p_2,p_3) - \frac{1}{(2\pi)^6}\hat{V} * \hat{f}(p_1,p_2,p_3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{3}(p_s^2 - m_s^2) + 2(p_r^2 - m_r^2) + \frac{3}{2}(p_u^2 - m_u^2)\right] \hat{f}_T(p_s,p_r,p_u) + \frac{1}{(2\pi)^6}\widehat{V_T} * \hat{f}_T(p_s,$$

mit $V = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{V}_i$.

Sind die Potentiale V_i, $1 \leq i \leq 3$, translationsinvariant, s bekommen wir:

$$\left[\frac{1}{3}(\Box_s + m_s^2) + 2(\Box_r + m_r^2) + \frac{3}{2}(\Box_u + m_u^2)\right] f_T(x_s,x_r,x_u)$$

$$- [V_1(x_r) + V_2(x_u + \frac{1}{2}x_r) + V_3(x_u - \frac{1}{2}x_r)]\, f_T(x_s,x_r,x_u) = 0 .$$

Wie lautet die fouriertransformierte Gleichung?

Dazu betrachten wir:

$$\{ I\Box_1 + m_1^2 + \Box_2 + m_2^2 + \Box_3 + m_3^2] f - [V_1 + V_2 + V_3] f \}^{\wedge}$$ und lassen die Abbildung $(-I^*)^{-1}$ folgen; wir berechnen $(I^*)^{-1}[(V_2 + V_3) f]^{\wedge}$, da

$$(I^*)^{-1}[V_1 f]^{\wedge} = \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V}_1 * \hat{f}_T$$. Nun ergibt sich:

$$[(V_2 + V_3) f]^{\wedge}(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int dx_1 dx_2 dx_3 \, e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)}$$

$$\cdot \{ V_2(x_1 - x_3) + V_3(x_1 - x_2) \} f(x_1, x_2, x_3)$$

Wir benutzen, daß f total antisymmetrisch sein soll und vertauschen unter dem Integral x_1 mit x_2 beim ersten Integranden und x_1 mit x_3 und nachfolgend x_2 mit x_3 beim zweiten Integranden; wir erhalten:

$$[(V_2 + V_3) f]^{\wedge}(p_1, p_2, p_3)$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^6} \int dx_1 dx_2 dx_3 \; e^{i(p_1 x_2 + p_2 x_1 + p_3 x_3)} V_2(x_2 - x_3) f(x_1, x_2, x_3)$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^6} \int dx_1 dx_2 dx_3 \; e^{i(p_1 x_2 + p_2 x_3 + p_3 x_1)} V_3(x_2 - x_3) f(x_1, x_2, x_3) \; .$$

Da $(p_1, p_2, p_3)^{\top} = T^{*} (p_s, p_r, p)^{\top}$ und $(x_2, x_1, x_3)^{\top} = A(x_s, x_r, x_u)^{\top}$ und $(x_2, x_3, x_1)^{\top} = B(x_s, x_r, x_u)^{\top}$ gilt - wobei A aus T^{-1} durch Vertauschen der zweiten mit der ersten Zeile und B aus T^{-1} durch Vertauschen der dritten mit der ersten und nochmaliges Vertauschen der ersten mit der zweiten Zeile entstehen - ergibt sich:

$$p_1 x_2 + p_2 x_1 + p_3 x_3 = p_s x_s + \frac{1}{2}(p_r + \frac{3}{2} p_u) x_r + (p_r - \frac{1}{2} p_u) x_u \, .$$

$$p_1 x_2 + p_2 x_3 + p_3 x_1 = p_s x_s + \frac{1}{2}(-p_r + \frac{3}{2} p_u) x_r + (-p_r - \frac{1}{2} p_u) x_u .$$

Also bekommen wir mittels der Beziehung $(-I^*)^{-1} \hat{f} = \widehat{f_T}$:

$$[(V_2 + V_3) f]\hat{}\,(p_1, p_2, p_3) =$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^6} \int dx_s dx_r dx_u \exp i [p_s x_s + \frac{1}{2}(p_r + \frac{3}{2} p_u) x_r + (p_r - \frac{1}{2} p_u) x_u]$$
$$\cdot V_2(x_r) f_T(x_s, x_r, x_u)$$
$$- \frac{1}{(2\pi)^6} \int dx_s dx_r dx_u \exp i [p_s x_s + \frac{1}{2}(-p_r + \frac{3}{2} p_u) x_r + (-p_r - \frac{1}{2} p_u) x_u]$$
$$\cdot V_3(x_r) f_T(x_s, x_r, x_u)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V}_2 *_2 \widehat{f_T}(p_s, \frac{p_r}{2} + \frac{3}{4} p_u, p_r - \frac{1}{2} p_u)$$
$$- \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V}_3 *_2 \widehat{f_T}(p_s, -\frac{p_r}{2} + \frac{3}{4} p_u, -p_r - \frac{1}{2} p_u) .$$

$*_2$ bedeutet die Faltung bezüglich der zweiten Koordinate.
Somit lautet die fouriertransformierte Gleichung:

$$[\frac{1}{3}(p_s^2 - m_s^2) + 2(p_r^2 - m_r^2) + \frac{3}{2}(p_u^2 - m_u^2)] \widehat{f_T}(p_s, p_r, p_u)$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V}_1 *_2 \widehat{f_T}(p_s, p_r, p_u) - \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V}_2 *_2 \widehat{f_T}(p_s, \frac{p_r}{2} + \frac{3}{4} p_u, p_r - \frac{1}{2} p_u)$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{V}_3 *_2 \widehat{f_T}(p_s, -\frac{p_r}{2} + \frac{3}{4} p_u, -p_r - \frac{1}{2} p_u) = 0$$

Mit den gleichen Überlegungen wie beim Zweiteilchenfall läßt sich wieder der Schwerpunkt separieren, und wir erhalten für $V_2 \bullet V_3 \in H \bullet H$ als Gleichung für ein $\widetilde{\varphi} \in H_r \bullet H_u$:

$$\left[2(p_r^2 - m_r^2) + \frac{3}{2}(p_u^2 - m_u^2)\right]\tilde{\varphi}(p_r, p_u) + \frac{1}{(2\pi)^2}\tilde{V}_1 *_1 \tilde{\varphi}(p_r, p_u)$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^2}\tilde{V}_2 *_1 \tilde{\varphi}\left(\frac{p_r}{2} + \frac{3}{4}p_u, p_r - \frac{1}{2}p_u\right) + \frac{1}{(2\pi)^2}\tilde{V}_3 *_1 \tilde{\varphi}\left(-\frac{p_r}{2} + \frac{3}{4}p_u, -p_r - \frac{1}{2}p_u\right) = 0 .$$

$*_1$ bedeutet die Faltung bezüglich der ersten Koordinate. Wir definieren die folgenden Abbildungen:

$$K_1\tilde{\varphi}(p_r, p_u) := \frac{1}{(2\pi)^2}\tilde{V}_1 *_1 \tilde{\varphi}(p_r, p_u),$$

$$K_2\tilde{\varphi}(p_r, p_u) := \frac{-1}{(2\pi)^2}\tilde{V}_2 *_1 \tilde{\varphi}\left(\frac{p_r}{2} + \frac{3}{4}p_u, p_r - \frac{1}{2}p_u\right),$$

$$K_3\tilde{\varphi}(p_r, p_u) := \frac{1}{(2\pi)^2}\tilde{V}_3 *_1 \tilde{\varphi}\left(-\frac{p_r}{2} + \frac{3}{4}p_u, -p_r - \frac{1}{2}p_u\right).$$

Die K_i sind lineare Operatoren und entsprechend den Annahmen über die Potentiale V_i auch beschränkt.

Wenn wir zur Abkürzung setzen

$K_0 := 2(Id_r^2 - m_r^2) + \frac{3}{2}(Id_u^2 - m_u^2)$, so können wir die zur Ableitung der Faadeev-Gleichungen nötigen Resolventen definieren:

$$g_0(z) := [z - K_0]^{-1}$$

$$g_\alpha(z) := [z - K_0 - K_\alpha]^{-1} \qquad (1 \le \alpha \le 3)$$

$$G(z) := [z - K_0 - K_1 - K_2 - K_3]^{-1}$$

$g_0(z)$ heißt die freie Resolvente, $g_\alpha(z)$ Kanalresolvente und $G(z)$ heißt die volle Resolvente.

Bemerkung

$K_o + K_1$ beschreibt die Dynamik des Kanals E_1, also die Dynami des Subsystems (23) und die Kinematik von (1); aber auch für $K_o + K_\alpha$, $\alpha \neq 1$, läßt sich durch eine geeignete Grundraumtrans formation ein (zu $K_o + K_\alpha$ unitär äquivalenter) Operatorausdruc finden von derselben analytischen Struktur wie $K_o + K_1$. Nicht zuletzt deshalb heißt $g_\alpha(z)$ Kanalresolvente.

Bevor wir die Streugleichungen der Faadeev-Theorie ableiten, be stimmen wir die Resolventen für das Dreiteilchenproblem in unse rer Theorie.

Es sei $\zeta = 3$ und $\varphi \in H^{(3)}$; dann lautet die Gleichung für $\varphi_{E_1} =: \varphi_1$

$$[\Box_1 + m_1^2 + \Box_2 + m_2^2 + \Box_3 + m_3^2]\varphi_1(x_1\alpha_1, x_2\alpha_2, x_3\alpha_3 \mid a) =$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_1\alpha'}\delta^{\mu\nu}(x_1)3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}F_{\beta\alpha_2}(x_1 - x_2)\varphi_1(x_1\delta, x_1\gamma, x_3\alpha_3 \mid a)$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_1\alpha'}\delta^{\mu\nu}(x_1)V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}F_{\delta\alpha_2}(x_1 - x_2)\varphi_1(x_1\gamma, x_1\beta, x_3\alpha_3 \mid a)$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_3\alpha'}\delta^{\mu\nu}(x_1)3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}F_{\beta\alpha_3}(x_1 - x_3)\varphi_1(x_1\delta, x_2\alpha_2, x_1\gamma \mid a)$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_1\alpha'}\delta^{\mu\nu}(x_1)V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}F_{\delta\alpha_3}(x_1 - x_3)\varphi_1(x_1\gamma, x_2\alpha_2, x_1\beta \mid a)$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_2\alpha'}\delta^{\mu\nu}(x_2)3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}F_{\beta\alpha_1}(x_2 - x_3)\varphi_1(x_1\alpha_1, x_2\delta, x_2\gamma \mid a)$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_2\alpha'}\delta^{\mu\nu}(x_2)V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}F_{\delta\alpha_3}(x_2 - x_3)\varphi_1(x_1\alpha_1, x_2\gamma, x_2\beta \mid a)$$

Sie ist das Resultat der zweiten Methode zur Clusterzerlegung und der Abbildung j .

Den fouriertransformierten Ausdruck der linken Seite in Schwerpunktskoordinaten kennen wir bereits; für die rechte Seite der Gleichung berechnen wir:

1) $\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,\exp[i(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)]\,F_3(x_1-x_2)\varphi_1(x_1,x_1,x_3)$

2) " " $F_2(x_1-x_3)\varphi_1(x_1,x_2,x_1)$

3) " " $F_1(x_2-x_3)\varphi_1(x_1,x_2,x_2)$,

wobei die F_i irgendwelche fouriertransformierbare Funktionen seien.

Wir beginnen mit 3).

Zu 3): Das Bild des Vektors $(x_1,x_2,x_2)^\top$ unter T ist der Vektor $\left(\frac{x_1+2x_1}{3}, 0, x_1-x_2\right) = (x_s, 0, x_u)$; also ist $\varphi_1(x_1,x_2,x_2) = \varphi_{1T}(x_s,0,x_u)$; von der für die Werte von x_s bzw. x_u bedingten Einschränkung durch die Nebenbedingung $x_r = x_2 - x_3 = 0$ befreien wir uns durch die Variablentransformation $x_2' := 2x_2 - x_3$, und erhalten so:

$$\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,\exp[i(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)]\,F_1(x_2-x_3)\varphi_1(x_1,x_2,x_2)$$

$$=\frac{1}{2}\int dx_1\,dx_2'\,dx_3\,\exp\left[i\left(p_1x_1+p_2\frac{x_2'+x_3}{2}+p_3x_3\right)\right]F_1\left(\frac{x_2'-x_3}{2}\right)$$

$$\cdot\varphi_{1T}\left(\frac{x_1+x_2'+x_3}{3}, 0, x_1-\frac{x_2'+x_3}{2}\right) = \frac{1}{2}\int dx_1\,dx_2'\,dx_3\,\exp[i(p_1x_1+p_2x_2'+p_3x_3$$

$$+\frac{p_2}{2}(x_3-x_2')]\,F_1\left(\frac{x_2'-x_3}{2}\right)\varphi_{1T}\left(\frac{x_1+x_2'+x_3}{3}, 0, x-\frac{x_2'+x_3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int dx_s\,dx_r\,dx_u\,\exp\left[i\left(p_sx_s+p_rx_r+p_ux_u-\frac{p_2}{2}x_r\right)\right]F_1\left(\frac{x_r}{2}\right)\varphi_{1T}(x_s,0,x_u);$$

dabei haben wir wieder $T(x_1,x_2',x_3)^\top =: (x_s,x_r,x_u)^\top$ gesetzt.

Nun führen wir die Transformation $x_r \longrightarrow \frac{x_r}{2} =: x_r'$ durch und erhalten:

$$\frac{1}{(2\pi)^6}\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,\exp[i(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)]\,F_1(x_2-x_3)\,\varphi_1(x_1,x_2,x_2)$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^6}\int dx_s\,dx_r'\,dx_u\,\exp[i(p_s x_s+(2p_r-p_2)x_r'+p_u x_u)]\,F_1(x_r')\,\varphi_{1T}(x_s,0,x_u)$$

$$=-\tilde{F}_1(2p_r-p_2)\,\tilde{\varphi}_{1T}(p_s,0,p_u)\ ,$$

mit $\tilde{F}_1(-p_3) := \frac{1}{(2\pi)^2}\int dx_r'\,\exp i(p_3)x_r'\,F_1(x_r')$ und mit

$$\tilde{\varphi}_{1T}(p_s,0,p_u) := \frac{1}{(2\pi)^4}\int dx_s\,dx_u\,\exp i\,(p_s x_s+p_u x_u)\,\varphi_{1T}(x_s,0,x_u)\ .$$

Zu 2): Es gilt: $\varphi_1(x_1,x_2,x_1)=\varphi_1\circ E_2^{-1}(x_2,x_1,x_1) =: -\varphi_2(x_2,x_1,x_1)$

Bei der Fouriertransformation vertauschen wir x_1 und x_2 und erhalten:

$$\int dx_1\,dx_2\,dx_3\exp[i(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)]\,F_2(x_1-x_3)\,\varphi_1(x_1,x_2,x_1)$$

$$=-\int dx_1\,dx_2\,dx_3\exp[i(p_1x_2+p_2x_1+p_3x_3)]\,F_2(x_2-x_3)\,\varphi_2(x_1,x_2,x_2)$$

$$=\frac{-1}{2}\int dx_1\,dx_2'\,dx_3\exp[i(p_2x_1+p_1x_2'+p_3x_3+\frac{p_1}{2}(x_3-x_2'))]\,F_2(\frac{x_2'-x_3}{2})$$

$$\cdot\varphi_{2T}(\frac{x_1+x_2'+x_3}{3},0,x_1-\frac{x_2'+x_3}{2}) = \frac{1}{2}\int dx_s\,dx_r\,dx_u\exp[i(p_s x_s+\frac{1}{2}(p_r+\frac{3}{2}p_u)x_r$$

$$+(p_r-\frac{1}{2}p_u)x_u-\frac{p_1}{2}x_r]\,F_2(\frac{x_r}{2})\,\varphi_{2T}(x_s,0,x_u)\ ,$$

denn $p_1x_2+p_2x_1+p_3x_3 = p_sx_s+\frac{1}{2}\,(p_r+\frac{3}{2}p_u)\,x_r+(p_r-\frac{1}{2}p_u)\,x_u$.

Transformieren wir wieder x_r in x_r', so erhalten wir den Ausdruck:

$$\cdot\frac{1}{2\pi)^6}\int dx_s\,dx_r'\,dx_u\,\exp\left[i(p_s x_s+(p_r+\frac{3}{2}p_u-p_1)x_r'+(p_1-\frac{1}{2}p_u)x_u\right]$$

$$\cdot F_2(x_r')\varphi_{2T}(x_s,0,x_u)$$

$$+\tilde{F}_2(-p_3)\,\tilde{\varphi}_{21}(p_s,0,p_r-\frac{1}{2}p_u)$$

mit $p_3=\frac{1}{3}p_s-p_r-\frac{1}{2}p_u$.

Zu 1): Es gilt: $\varphi_1(x_1,x_1,x_3)=\varphi_1\circ E_3^{-1}(x_3,x_1,x_1)=:\varphi_3(x_3,x_1,x_1)$,
so daß - wenn wir unter dem Integral x_1 mit x_3 vertauschen -
wir erhalten:

$$\int dx_1\,dx_2\,dx_3\exp\left[i(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)\,F_3(x_1-x_2)\,\varphi_1(x_1,x_1,x_3)\right.$$

$$=\int dx_1\,dx_2\,dx_3\exp\left[i(p_3x_1+p_2x_2+p_1x_3)\right]F_3(x_3-x_2)\varphi_3(x_1,x_3,x_3)$$

$$=\int dx_1\,dx_2\,dx_3\exp[i(p_3x_1+p_1x_2+p_2x_3)]\,F_3(x_2-x_3)\varphi_3(x_1,x_2,x_2),$$

wenn wir nachfolgend x_2 mit x_3 vertauschen.
Wegen $p_3x_1+p_1x_2+p_2x_3=p_sx_s+\frac{1}{2}(-p_r+\frac{3}{2}p_u)x_r+(-p_r-\frac{1}{2}p_u)x_u$
ergibt sich wieder folgender Ausdruck:

$$\cdot\frac{1}{2}\int dx_1\,dx_2'\,dx_3\exp\left[i(p_3x_1+p_1x_2'+p_2x_3+\frac{p_1}{2}(x_3-x_2')\right]F_3(\frac{x_2'-x_3}{2})$$

$$\varphi_{31}(\frac{x_1+x_2'+x_3}{3},0,x_1-\frac{x_2'+x_3}{2})=-\frac{1}{2}\int dx_s\,dx_r\,dx_u\exp\left[i(p_sx_s+\frac{1}{2}(-p_r+\frac{3}{2}p_u)x_r\right.$$

$$\left.(-p_r-\frac{1}{2}p_u)x_u-\frac{p_1}{2}x_r)\right]F_3(\frac{x_r}{2})\varphi_{3T}(x_s,0,x_u)=-\int dx_s\,dx_r'\,dx_u\exp\left[i(p_sx_s\right.$$

$$\left.(-p_r+\frac{3}{2}p_u-p_1)x_r'+(-p_r-\frac{1}{2}p_u)x_u\right]F_3(x_r')\varphi_{3T}(x_s,0,x_u)$$

Wegen $-p_r+\frac{3}{2}p_u-p_1=-p_2=-\frac{1}{3}p_s-p_r+\frac{1}{2}p_u$ ergibt sich

$$\frac{1}{(2\pi)^6}\int dx_1 dx_2 dx_3 \exp\,[i(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)]F_3(x_1-x_2)\varphi_3(x_1,x_1,x_3)$$

$$=-\tilde{F}_3(-p_2)\tilde{\varphi}_{3T}(p_s,0,-p_r-\frac{1}{2}p_u)$$

Insgesamt erhalten wir als fouriertransformierte Gleichung in Schwerpunktskoordinaten:

$$[\frac{1}{3}(p_s^2-m_s^2)+2(p_r^2-m_r^2)+\frac{3}{2}(p_u^2-m_u^2)]\hat{\varphi}_{1T}(p_3;p_r,\alpha_2\alpha_3;p_u,\alpha_1)$$

$$=\gamma_{\mu\alpha_1\dot{\alpha}}ip_1^{\mu}3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\tilde{F}_{\beta\alpha_2}(-p_2)\tilde{\varphi}_{3T}(p_s;0,\delta\gamma;-p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha_3)$$

$$+\gamma_{\mu\alpha_2\dot{\alpha}}ip_1^{\mu}V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\tilde{F}_{\delta\alpha_2}(-p_2)\tilde{\varphi}_{3T}(p_s;0,\gamma\beta;-p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha_3)$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_3\dot{\alpha}}ip_1^{\mu}3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\tilde{F}_{\beta\alpha_3}(-p_3)\tilde{\varphi}_{2T}(p_s;0,\delta\gamma;p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha_2)$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_3\dot{\alpha}}ip_1^{\mu}V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\tilde{F}_{\delta\alpha_3}(-p_3)\tilde{\varphi}_{2T}(p_s;0,\gamma\beta;p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha_2)$$

$$+\gamma_{\mu\alpha_3\dot{\alpha}}ip_2^{\mu}3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\tilde{F}_{\beta\alpha_3}(-p_3)\tilde{\varphi}_{1T}(p_s;0,\delta\gamma;p_u,\alpha_1)$$

$$+\gamma_{\mu\alpha_3\dot{\alpha}}ip_2^{\mu}V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\tilde{F}_{\delta\alpha_3}(-p_3)\tilde{\varphi}_{1T}(p_s;0,\gamma\beta;p_u,\alpha_1)$$

Dabei sind die p_i in kanonischer Weise durch die p_s, p_r, p_u gegeben.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\gamma_{\mu\alpha_1\alpha'} ip_1^{\mu}\, 3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\, \tilde{F}_{\beta\alpha_2}(-p_2)\tilde{\varphi}_{3T}(p_s;0,\delta\gamma;-p_r-\tfrac{1}{2}p_u,\alpha_3)$$

$$+\gamma_{\mu\alpha_2\alpha'} ip_1^{\mu}\, V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\, \tilde{F}_{\delta\alpha_2}(-p_2)\tilde{\varphi}_{3T}(p_s;0,\gamma\beta;-p_r-\tfrac{1}{2}p_u,\alpha_3)$$

$$=: C^{lm}_{\alpha_1\alpha_2}(p_s,p_r,p_u)\tilde{\varphi}_{3T}(p_s;0,lm;-p_r-\tfrac{1}{2}p_u,\alpha_3),$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_1\alpha'} ip_1^{\mu}\, 3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\, \tilde{F}_{\beta\alpha_3}(-p_3)\tilde{\varphi}_{2T}(p_s;0,\delta\gamma,p_r-\tfrac{1}{2}p_u,\alpha_2)$$

$$-\gamma_{\mu\alpha_2\alpha'} ip_1^{\mu}\, V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\, \tilde{F}_{\delta\alpha_3}(-p_3)\tilde{\varphi}_{2T}(p_s;0,\gamma\beta,p_r-\tfrac{1}{2}p_u,\alpha_2)$$

$$=: C^{lm}_{\alpha_1\alpha_3}(p_s,p_r,p_u)\tilde{\varphi}_{2T}(p_s;0,lm;p_r-\tfrac{1}{2}p_u,\alpha_2),$$

$$\gamma_{\mu\alpha_2\alpha'} ip_2^{\mu}\, 3V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\, \tilde{F}_{\beta\alpha_3}(-p_3)\tilde{\varphi}_{1T}(p_s;0,\delta\gamma;p_u,\alpha_1)$$

$$+\gamma_{\mu\alpha_2\alpha'} ip_2^{\mu}\, V_{\alpha'}^{\beta\gamma\delta}\, \tilde{F}_{\delta\alpha_3}(-p_3)\tilde{\varphi}_{1T}(p_s;0,\gamma\beta;p_u,\alpha_1)$$

$$=: C^{lm}_{\alpha_2\alpha_3}(p_s,p_r,p_u)\tilde{\varphi}_{1T}(p_s;0,lm;p_u,\alpha_1),$$

und schließlich definieren wir noch:

$$g_0(z) := \left[z-\frac{1}{3}(Id_s^2-m_s^2)-2(Id_r^2-m_r^2)-\frac{3}{2}(Id_u^2-m_u^2)\right]^{-1}$$

Dann können wir die Gleichung so aufschreiben:

$$\widehat{\varphi}_{1T}(p_s;p_r,\alpha_2\alpha_3;p_u,\alpha_1) =$$

$$g_0(0,p_s,p_r,p_u)\ \{\ C^{lm}_{\alpha_1\alpha_2}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi}_{3T}(p_s;0,lm,-p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha_3)$$

$$+\ C^{lm}_{\alpha_1\alpha_3}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi}_{2T}(p_s;0,lm;p_r-\frac{1}{2}p_u;\alpha_2)$$

$$+\ C^{lm}_{\alpha_2\alpha_3}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi}_{1T}(p_s;0,lm;p_u,\alpha_1)\ \}$$

mit $g_0(0,p_s,p_r,p_u) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ [i\varepsilon - \frac{1}{2}(p_s^2-m_s^2)-2(p_r^2-m^2)-\frac{3}{2}(p_u^2-m_u^2)$

Wie man sieht, läßt sich der Schwerpunktsvektor p_s jetzt nicht mehr separieren wie etwa beim Zweiteilchenproblem; wir wollen auch nicht den Fall betrachten, daß $\widehat{\varphi}_{..}$ als Faktor den Ausdruck $e^{ip_s(\ )_s}$ enthält, weil dann F als Distribution fouriertransformiert hätte werden müssen; diesen Fall schließen wir in dieser Arbeit aus.

Sondern wir definieren als Kanalresolventen:

$$[z-K_0-K_\alpha]^{-1} = g_\alpha(z) \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq 3$$

mit

$$K_1\widehat{\varphi}_{1T}(p_s;p_r,\alpha_2\alpha_3;p_u\alpha_1) := C^{lm}_{\alpha_2\alpha_3}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi}_{1T}(p_s;0,lm;p_u\alpha_1)$$

$$K_2\widehat{\varphi}_{1T}(p_s;p_r,\alpha_2\alpha_3;p_u,\alpha_1) := C^{lm}_{\alpha_1\alpha_3}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi}_{2T}(p_s;0,lm,p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha_2)$$

$$K_3\widehat{\varphi}_{1T}(p_s;p_r,\alpha_2\alpha_3;p_u,\alpha_1) := C^{lm}_{\alpha_1\alpha_2}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi}_{3T}(p_s;0,lm;-p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha_3)$$

wieder sind die K_i lineare Operatoren.

Mit diesen Bezeichnungen lautet unsere Gleichung kurz:

$$\left(K_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} K_\alpha\right) \widehat{\varphi}_{1T}(p_s; p_r, \alpha_2 \alpha_3; p_u, \alpha_1) = 0 \ ,$$

so daß wir als volle Resolvente definieren:

$$G(z) := \left[z - K_0 - \sum_{\alpha=1}^{3} K_\alpha\right]^{-1}$$

Für das weitere setzen wir voraus, daß φ_{1T} schon vollständig antisymmetrisch sei; wegen $\varphi_{1T} = \varphi_{2T} = \varphi_{3T}$ sind dann die K_i auf allen Kanälen definiert, so daß alle Ausdrücke, die zur Ableitung der Faadeev-Gleichungen nötig sind, auch definiert sind. Wir geben jetzt einen kurzen Abriß der formalen Ableitung.

Eine bekannte Resolventengleichung des Zweiteilchensystems lautet: $g = g_0 + g_0 V g = g_0 + g V g_0$, wobei g die volle Zweiteilchenresolvente ist und der Kürze halber die z-Abhängigkeit weggelassen ist.

Aus ihr folgt durch Einsetzen:

$$g = g_0 + g_0 V g_0 + g_0 V g V g_0 = g_0 + g_0 [V + V g V] g_0$$

$$= g_0 + g_0 t g_0 \ .$$

t stellt die T-Matrix des Zweiteilchensystems dar.

Nochmaliges Einsetzen ergibt:

$$g = g_0 + g_0 t g_0 = g_0 + g_0 V g_0 + g_0 V g_0 t g_0 \ ,$$

so daß $t = V + V g_0 t$.

Wenn wir setzen $K := \sum_{i=1}^{3} K_i$, so gelten dieselben Resolventengleichungen auch für das Dreiteilchensystem:

$T = K + K G K = K + K g_0 T$; es folgt, daß $G K = g_0 T$; d.h. - definieren wir $T_i := K_i + K_i G K \ - \ T_i = K_i + K_i g_0 T$ gilt, eine

Beziehung, die als Faadeev-Ansatz bekannt ist.

Aus ihr bekommen wir sofort die Gleichung:

$$T_i = [1 - K_i g_0]^{-1} \{K_i + K_i g_0 \sum_{j=1}^{3} (1 - \delta_{ij}) T_j\}$$

Da im Zweiteilchensystem die Beziehung $t = (1 - v g_0)^{-1} v$ gil
erkennen wir aus der Definition von K_i und g_0, daß
$t_i := [1 - K_i g_0]^{-1} K_i$ die Fortsetzung der Streumatrix t de
i-ten Clusters auf den Dreiteilchen-Hilbertraum darstellt. Mit
den Ausdrücken t_i ergibt sich die Faadeev-Gleichung für T:

$$T_i = t_i + \sum_{j=1}^{3} t_i g_0 (1 - \delta_{ij}) T_j =: t_i + \sum_{j=1}^{3} F_{ij} g_0 T_j .$$

In die Resolventengleichung $G = g_0 + g_0 T g_0$ setzen wir für
den Ausdruck $\sum T_i$ ein und erhalten:

$$G = g_0 + \sum_i g_0 T_i g_0 =: g_0 + \sum_i G_i$$
$$= g_0 + \sum_i \{g_0 t_i g_0 + g_0 \sum_j F_{ij} g_0 T_j g_0\}$$

Da im i-ten Cluster die Beziehung $g = g_0 + g_0 t g_0$ bzw.
$g - g_0 = g_0 t g_0$ gilt, erkennen wir wieder in $g_0 t_i g_0$ die For
setzung von $g - g_0$; diese Fortsetzung bezeichnen wir mit g_i -
so daß wir als Faadeev-Gleichung für die Resolvente erhalten:

$$G = g_0 + \sum_i G_i = g_0 + \sum_i \{g_i - g_0 + g_0 \sum_j F_{ij} G_j\}.$$

Aus dem Kapitel II wissen wir, daß $\hat{\varphi}$ folgende Zerlegung be-
sitzt:

$$\hat{\varphi}(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{3} \sum_{v=1}^{3} \chi(E_v) E_v^{-1} A_{12} \quad \hat{\varphi}_0(p_1, p_2, p_3) =: \frac{1}{3} \sum_{v=1}^{3} \hat{\varphi}_v(p_1, p_2,$$

dabei ist $\hat{\varphi}_0$ nicht (notwendig) antisymmetrisch.

Dem entspricht in Schwerpunktsgrößen:

$$\hat{\varphi}_T(p_s, p_r, p_u) := \frac{1}{3}\sum_{\nu=1}^{3} \hat{\varphi}_{\nu T}(p_s, p_r, p_u)$$

Wir verlangen nun - im nicht-relativistischen Fall läßt es sich beweisen - daß folgendes gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \pm i\varepsilon\, g_i(\pm i\varepsilon)\hat{\varphi}_{\nu T} = \delta_{i\nu} \lim_{\varepsilon \to 0} \pm i\varepsilon\, g_\nu(\pm i\varepsilon)\hat{\varphi}_{\nu T}$$

$$=: \delta_{i\nu}\, \hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T}, \quad i = 0,1,2,3.$$

D.h. die "freien" Kanalwellenfunktionen $\hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T}$, welche Eigenfunktionen von einer Feldgleichung mit inneren Clusterpotential und ohne Clusteraustauschpotentiale sind, bilden ein Orthogonalsystem.

Wenn wir alle Resolventen im $\lim_{\varepsilon \to 0}$ interpretieren, erhalten wir bei Anwendung von G auf $\hat{\varphi}_{\nu T}$, $1 \le \nu \le 3$:

$$\hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T} = G\,\hat{\varphi}_{\nu T} = \sum_i G_i \hat{\varphi}_{\nu T} =: \sum_i (\hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T})_i = \sum_i \Big\{ g_i - g_0 + g_0 \sum_j F_{ij}\; G_j \Big\} \hat{\varphi}_{\nu T}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T})_i = \delta_{i\nu}\, \hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T} + g_0 \sum_j F_{ij}\, (\hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T})_j \\ \hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T} = \sum_i (\hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T})_i \,. \end{cases}$$

Dies sind die Faadeev-Gleichungen für die Kanalwellenfunktionen $\hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T}$.

Für die antisymmetrische Funktion $\hat{\varphi}_T$ ergibt sich daraus:

$$\hat{\varphi}^{\pm}_T := G\,\hat{\varphi}_T = \frac{1}{3}\sum_\nu \hat{\varphi}^{\pm}_{\nu T}.$$

Da im allgemeinen Fall jedes $\hat{\varphi}_{\nu T}$ in eindeutiger Weise aus $\hat{\varphi}_{1T}$ hervorgeht und wir die Impulsbilanzgleichung des Dreiteilchenproblems für $\hat{\varphi}_{1T}$ angeschrieben haben, formulieren wir die Faadeev-Gleichungen für $\hat{\varphi}^{\pm}_{1T}$; dazu approximieren wir $[1 - K_i g_o]^{-1}$ durch $1 + K_i g_o$, so daß wir erhalten:

$$(\hat{\varphi}^{\pm}_{1T})_1 = \hat{0}^{\pm}_{1T} + g_o [1 + K_2 g_o] K_2 (\hat{\varphi}^{\pm}_{1T})_2 + g_o [1 + K_3 g_o] K_3 (\hat{\varphi}^{\pm}_{1T})_3$$

$$(\hat{\varphi}^{\pm}_{1T})_2 = g_o [1 + K_1 g_o] K_1 (\hat{\varphi}^{\pm}_{1T})_1 + g_o [1 + K_3 g_o] K_3 (\hat{\varphi}^{\pm}_{1T})_3$$

$$(\hat{\varphi}^{\pm}_{1T})_3 = g_o [1 + K_1 g_o] K_1 (\hat{\varphi}^{\pm}_{1T})_1 + g_o [1 + K_2 g_o] K_2 (\hat{\varphi}^{\pm}_{1T})_2 ;$$

$$\hat{\varphi}^{\pm}_{1T} = \sum_{\iota=1}^{3} (\hat{\varphi}^{\pm}_{1T})_\iota .$$

1. Will man ein Dreiteilchenproblem mit verschiedenen Systemen identischer Teilchen behandeln, so genügt dieses eine Gleichungssystem nicht mehr; statt dessen muß man eine andere Zerlegung von A_3 wählen und somit auch die antisymmetrierende Abbildung C (siehe Kap. II) neu bestimmen.

2. Wir bekommen für ein System identischer Teilchen genau dann mit dem Faadeev-System für die Kanalwellenfunktion $\hat{\varphi}_{1T}$ aus, wenn wir $\hat{\varphi}_{1T}$ schon antisymmetrisch ansetzen können; denn dann sind Produkte von K_i's - wie sie in den t_i auftauchen - definiert wegen $\hat{\varphi}_{\nu T} = \hat{\varphi}_{1T}$ für alle $1 \leq \nu \leq 3$.

Beginnt man jedoch mit einer partiell antisymmetrischen Kanalwellenfunktion $\widehat{\varphi}_{1T}$, so müssen die Cluster - und Austauschpotentiale - die in Ortsraumkoordinaten für jeden Kanal identische Ausdrücke darstellen - im Impulsraum für alle Kanalwellenfunktionen definiert werden; nur so können wir den Operatorausdruck $T = K + KGK$ überhaupt definieren.

Die in Kapitel II definierte Abbildung C ergibt für jede Kanalwellenfunktion $\varphi_\nu = \chi(E_\nu)\varphi_1 \circ E_\nu^{-1}$ dieselbe dynamische Gleichung; also ist in den Rechnungen zur Fouriertransformation für die Kanalwellenfunktion φ_1 nun φ_ν zu setzen. Wir können und müssen deshalb definieren:

$$\widehat{K_1(\varphi_\nu)_{1T}}(p_s;p_r,\alpha_2\alpha_3;p_u,\alpha_1) = C^{lm}_{\alpha_2\alpha_3}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{(\varphi_\nu)_{1T}}(p_s;0,lm;p_u,\alpha_1)$$

$$= \widehat{K_1\varphi_{\nu T}}(p_s;p_r,\alpha_2\alpha_3;p_u,\alpha_1) = C^{lm}_{\alpha_2\alpha_3}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi_{\nu T}}(p_s;0,lm;p_u,\alpha_1)$$

denn $(\varphi_\nu)_{1T} = \chi(E_\nu)\varphi_1 \circ E_\nu^{-1} \circ E_1^{-1} \circ C^{-1} = \varphi_{\nu T}$

Für die Definition von K_2, K_3 berechnen wir $\widehat{(\varphi_2)_{2T}}$ und $\widehat{(\varphi_2)_{3T}}$

$$(\varphi_2)_{2T} = \chi(E_2)\varphi_1 \circ E_2^{-1} \circ E_2^{-1} \circ C^{-1} = \chi(E_2)\varphi_1 \circ C^{-1} = -\varphi_{1T},$$

$$(\varphi_2)_{3T} = \chi(E_3)\varphi_1 \circ E_2^{-1} \circ E_3^{-1} \circ C^{-1} = -\chi(E_3)\varphi_1 \circ E_3^{-1} \circ C^{-1} = -\varphi_{3T}.$$

Dabei haben wir zuletzt die partielle Antisymmetrie von φ_1 benutzt.

Also erhalten wir:

$$\widehat{K_2\varphi_{2T}}(p_s;p_r,\alpha_2\alpha_3,p_u,\alpha_1) = -C^{lm}_{\alpha_1\alpha_3}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi}_{1T}(p_s;0,lm;p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha_2)$$

$$\widehat{K_3\varphi_{3T}}(p_s;p_r,\alpha_2\alpha_3;p_u,\alpha_1) = -C^{lm}_{\alpha_1\alpha_2}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi}_{3T}(p_s;0,lm;p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha_3)$$

Für die Definition von K_2 und K_3 auf $\widehat{\varphi}_{3T}$ berechnen wir $(\varphi_3)_{3T}$ und $(\varphi_3)_{2T}$:

$$(\varphi_3)_{2T} = X(E_3)\varphi_1 \circ E_3^{-1} \circ E_2^{-1} \circ C^{-1} = -\varphi_{1T} ,$$

$$(\varphi_3)_{3T} = X(E_3)\varphi_1 \circ E_3^{-1} \circ E_3^{-1} \circ C^{-1} = \varphi_{3T} .$$

Also erhalten wir:

$$K_2\widehat{\varphi_{3T}}(p_s;p_r,\alpha_2\alpha_3;p_u,\alpha_1) = -C^{lm}_{\alpha_1\alpha_3}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi}_{1T}(p_s,0,lm;p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha$$

$$K_3\widehat{\varphi_{3T}}(p_s,p_r,\alpha_2\alpha_3;p_u,\alpha_1) = C^{lm}_{\alpha_1\alpha_2}(p_s,p_r,p_u)\widetilde{\varphi}_{3T}(p_s,0,lm,-p_r-\frac{1}{2}p_u,\alpha$$

Damit sind alle für die Faadeev-Gleichungen nötigen Operatorausdrücke definiert.

Wir bemerken, daß die Methode der zweiten Quantisierung von Clustern gut zur Faadeev-Struktur der T-Matrix paßt; es genügt die Potentiale K_i für die Kanalwellenfunktion $\widehat{\varphi}_{1T}$ zu definieren. Im Prinzip kennt man dann auch

$K_i\widehat{(\varphi_\nu)}_{1T} = K_i\widehat{\varphi}_{\nu T}$, denn ebenso wie im Ortsraum sich die dynamische Gleichung für jeden Kanal gleich reproduziert - man setzt anstelle von φ_1 einfach φ_ν - läßt sich im Impulsraum $\widehat{\varphi}_{1T}$ durch $\widehat{\varphi}_{\nu T}$ bzw. $\widehat{\varphi}_{iT}$ durch $\widehat{(\varphi_\nu)}_{iT}$ ersetzen. Es bleibt also bloß die Bestimmung von $(\varphi_\nu)_{iT}$.

Übrigens hat man den hier dargelegten Sachverhalt auch beim nichtrelativistischen Dreiteilchenproblem, wie sofort aus den Seiten zu ersehen ist. Die im Buch von Schmid und Ziegelmann verwendete Bezeichnung V_α für die Clusterpotentiale im Impulsraum des Schwerpunktssystems lassen sich z.B. definieren über

die K_i von Seite für den Kanal 1 und mit den obigen Überlegungen auch für die restlichen Kanäle.

In expliziter Form lauten die Faadeev-Gleichungen für den ersten Kanal:

$$\hat{(\varphi^{\pm})}_{1T\,1}(p_s, p_r, \alpha_2\alpha_3; p_u, \alpha_1) = \hat{O}^{\pm}_{1T}(p_s; p_r, \alpha_2\alpha_3; p_u, \alpha_1)$$

$$+ g_o(p_s, p_r, p_u)\, C^{lm}_{\alpha_1\alpha_3}(p_s, p_r, p_u)\, (\tilde{\varphi}^{\pm}_{2T})_2(p_s; 0, lm; p_r - \frac{1}{2}p_u, \alpha_2)$$

$$- \int dp_r'\, g_o(p_s, p_r', p_r - \frac{1}{2}p_u)\, C^{hk}_{\alpha_2 m}(p_s, p_r', p_r - \frac{1}{2}p_u)\, g_o(p_s, p_r, p_u)\, C^{lm\gamma}_{\alpha_1\alpha_3}(p_s, p_r, p_u)$$

$$\cdot (\tilde{\varphi}^{\pm})_2(p_s; 0, hk; p_r' - \frac{1}{2}p_r + \frac{1}{4}p_u, l) + g_o(p_s, p_r, p_u)\, C^{lm}_{\alpha_1\alpha_2}(p_s, p_r, p_u)$$

$$\cdot (\tilde{\varphi}^{\pm}_{3T})_3(p_s; 0, lm, -p_r - \frac{1}{2}p_u, \alpha_3) + \int dp_r'\, g_o(p_s, p_r', -p_r - \frac{1}{2}p_u)\, C^{hk}_{\alpha_3 l}(p_s, p_r', -p_r - \frac{1}{2}p_u)$$

$$g_o(p_s, p_r, p_u)\, C^{lm\gamma}_{\alpha_1\alpha_2}(p_s, p_r, p_u)\, (\tilde{\varphi}^{\pm}_{3T})_3(p_s; 0, hk; -p_r' + \frac{1}{2}p_r + \frac{1}{4}p_u)$$

$$\hat{(\varphi^{\pm})}_{1T\,2}(p_s; p_r, \alpha_2\alpha_3; p_u, \alpha_1) =$$

$$g_o(p_s, p_r, p_u)\, C^{lm\gamma}_{\alpha_2\alpha_3}(p_s, p_r, p_u)\, (\tilde{\varphi}^{\pm}_{\pi 1})(p_s; 0, lm; p_u, \alpha_1) + \int dp_r'\, g_o(p_s, p_r'; p_u)$$

$$\cdot C^{hk}_{lm}(p_s, p_r'; p_u)\, g_o(p_s, p_r, p_u)\, C^{lm}_{\alpha_2\alpha_3}(\tilde{\varphi}^{\pm}_{3T})_1(p_s; 0, hk; p_u, \alpha_1) + g_o(p_s, p_r, p_u)$$

$$\cdot C^{lm}_{\alpha_1\alpha_2}(p_s, p_r, p_u)\,(\widetilde{\varphi^{\pm}_{3T}})_3(p_s; 0, lm; -p_r - \frac{1}{2}p_u, \alpha_3) + \int dp_r'\, g_o(p_s, p_r', -p_r - \frac{1}{2}p_u)$$

$$\cdot C^{hk}_{\alpha_3 l}(p_3, p_r', -p_r - \frac{1}{2}p_u)\, g_o(p_s, p_r, p_u)\, C^{lm}_{\alpha_1\alpha_2}(p_s, p_r, p_u)$$

$$\cdot (\widetilde{\varphi^{\pm}_{3T}})_3(p_s; 0, hk; -p_r' + \frac{1}{2}p_r + \frac{1}{4}p_u, m)\,,$$

$$(\widehat{\varphi^{\pm}_{1T}})_3(p_s; p_r, \alpha_2\, \alpha_3, p_u, \alpha_1) =$$

$$g_o(p_s, p_r, p_u)\, C^{lm}_{\alpha_2\alpha_3}(p_s, p_r, p_u)\,(\widetilde{\varphi^{\pm}_{1T}})_1(p_s; 0, lm, p_u, \alpha_1) + \int dp_r'\, g_o(p_s, p_r', p_u)$$

$$\cdot C^{hk}_{lm}(p_2, p_r'; p_u)\, g_o(p_s, p_r, p_u)\, C^{lm}_{\alpha_1\alpha_3}(p_s, p_r, p_u)\,(\widetilde{\varphi^{\pm}_{\pi 1}})_1(p_s; 0, hk; p_u, \alpha_1)$$

$$+ g_o(p_s, p_r, p_u)\, C^{lm}_{\alpha_1\alpha_3}(p_s, p_r, p_u)\,(\widetilde{\varphi^{\pm}_{2T}})_2(p_s; 0, lm; p_r - \frac{1}{2}p_u, \alpha_2)$$

$$- \int dp_r'\, g_o(p_s, p_r'; p_r - \frac{1}{2}p_u)\, C^{hk}_{\alpha_2 m}(p_s, p_r', p_r - \frac{1}{2}p_u)\, g_o(p_s, p_1, p_u)$$

$$C^{lm}_{\alpha_1\alpha_3'}(p_s, p_r, p_u)\,(\widetilde{\varphi^{\pm}_{\pi 2}})(p_s; 0, hk; p_r' - \frac{1}{2}p_r + \frac{1}{4}p_u, l)$$

Analoge Gleichungen erhält man auch für die anderen Kanäle

Anhang

Zur Theorie der Dipolregularisierung

Ziel dieses Anhangs ist es, die Begriffe "nichtkanonische Quantisierung", "Dipolregularisierung" und "indefinite Metrik" aus der Sicht der axiomatischen Quantenfeldtheorie zu studieren. Denn alle drei Begriffe - nichtkanonische Quantisierung, Regularisierung, indefinite Metrik - sind auch Begriffe der axiomatischen Quantenfeldtheorie.

Wir beginnen mit dem Begriff der nichtkanonischen Quantisierung und motivieren ihn mit zwei no-go-Theoremen der mathematischen Quantenfeldtheorie. Wir präsentieren als erstes no-go-Theorem das Haag-Theorem /21/:

Es sei φ_0 ein freies Skalarfeld zur Masse m und φ ein lokales Feld, welches sich kovariant transformiert unter der inhomogenen Lorentzgruppe $ISL(2,\mathbb{C})$; wenn beide Felder einschließlich ihrer konjugierten Felder irreduzibel sind und zu einem (beliebigen, aber festen) Zeitpunkt t unitär-äquivalent sind, so ist φ ein freies Feld zur Masse m .

Die Konsequenzen dieses Theorems sind weitreichend, denn es besagt, daß das Wechselwirkungsbild genau dann existiert, wenn die S-Matrix trivial ist. Welche Alternative also gibt es zum Wechselwirkungsbild? Das Haag-Theorem legt nahe die folgenden zwei Alternativen:

1) Man benutzt inäquivalente Darstellungsräume für φ_0 bzw. φ ;

2) man ändert die Voraussetzungen für φ so, daß φ_0 und φ nicht unitäräquivalent sein können.

Zu 1): Für ein freies Feld φ_0 ist man gewohnt anzunehmen, daß es kanonisch quantisiert ist und als Darstellungsraum der kanonischen (Anti-) Kommutatorrelationen der Fockraum zu wählen ist. Für eine Teilcheninterpretation des Feldes ist er nämlich bis auf Unitäräquivalenz der einzige Darstellungsraum. Somit bleibt für φ nur ein Darstellungsraum zu den kanonischen Kommutatorrelationen übrig, der nicht unitäräquivalent zum Fockraum ist.

Von solchen unitär nicht äquivalenten Darstellungsräumen existieren überabzählbar viele; sie alle zeichnet aus, daß kein Zustand eine Teilchenzahlinterpretation gestattet, weil jeder Zustand unendlich viele Teilchen repräsentiert /21, 22/.

Mit solchen "seltsamen" Darstellungsräumen hat sich bis heute aber auch nicht der Traum von einer nicht-trivialen S-Matrix erfüllen lassen, so daß man dazu übergegangen ist, vom Lorentz Kovarianten Darstellungsraum für φ nicht mehr die Darstellun eigenschaft für die kanonischen Kommutatorrelationen zu forder

Zu 2): Für diese Entscheidung (gegen unitärinäquivalente Darstellungsräume und für nichtkanonisch quantisierte Felder φ spricht auch ein Theorem von Powers /23/:

Theorem (Powers):

Es sei φ ein Poincaré-kovariantes Fermifeld und zur Zeit t = irreduzibel. Wenn φ kanonisch quantisiert ist und die Zustän

$$t^{-1}[\varphi(t,h)^* - \varphi(0,h)^*]\Omega ,$$

$$t^{-1}[\varphi(t,h)^* - \varphi(0,h)^*]\ \varphi(0,h)^*\Omega$$

in der Norm konvergieren für $t \longrightarrow 0$, so ist φ (t,h) ein freies Feld.

Denn φ muß eine lineare Differentialgleichung in t erfüllen nämlich $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,h) = \varphi(t, T_1 h) + \varphi(t, T_2 h)^*$;
T_1 und T_2 sind bestimmte lineare Operatoren auf $S(\mathbb{R}^3)$.
Zufolge der Relation $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,h) = i[H, \varphi(t,h)]_-$
ist H dann ein höchstens bilinearer Ausdruck in den Feldern φ und φ^* .

Für Fermifelder, die die kanonischen Antikommutatorrelationen erfüllen, gibt es also keine Wechselwirkung. Ein ähnliches Theorem für Bosefelder ist nicht bekannt.

Es gibt noch viele andere Kriterien dafür, ob ein Feld φ eine nicht-triviale S-Matrix haben kann oder nicht; /24 - 29/.

Wir lassen es bewenden bei den no-go-Theoremen von Haag und Powers und begnügen uns mit der Feststellung, daß das Heisenbergfeld nicht kanonisch quantisiert ist.

Wenn das Heisenbergfeld also nichtkanonisch quantisiert sein soll, so brauchen wir für das freie Feld und das Heisenbergfeld nicht notwendig unitärinäquivalente Definitionsbereiche vorauszusetzen, sondern wir können versuchen, beide Felder auf demselben relativistischen Darstellungsraum zu definieren, ohne gleich in die Falle des Haag'schen Theorems zu laufen. Denn ein nichtkanonisch quantisiertes Feld φ kann nicht unitäräquivalent sein zu einem kanonisch quantisierten Feld φ_0, weil der freie Kommutator unter einer unitären Abbildung invariant ist; also ist die Voraussetzung des Haag'schen Theorems bei nichtkanonischer Quantisierung nicht erfüllbar.

Für die Diskussion der Dipolregularisierung beschränken wir uns zunächst auf reelle Skalarfelder Q, die die Wightman-Axiome erfüllen /30/.

Wie in der Einleitung ausgeführt, weist der Darstellungsraum der Funktionalen Quantentheorie bezüglich der Quellen $j(f)$ und Senken $\vartheta(f)$ die Fockraumstruktur der Segal-Quantisierung von verallgemeinerten freien Feldern auf; die Operatoren $j(f)$ bzw. $\vartheta(f)$ sind die Operatoren $\psi^+(f)$ bzw. $\psi^-(f)$, wie sie in Kapitel II definiert wurden. Wir können dann den Feldoperator $Q_s(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(j(f) + \vartheta(f))$, $f \in S(\mathbb{R}^4)$ definieren; er ist kanonisch quantisiert, denn es gilt /31/:
$[Q_s(f), Q_s(g)]_- = i\Delta m(f,g)$. Dabei ist $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt eines komplexen Hilbertraumes. Wenn Q_s ein Wightman-Feld ist, so ist das Skalarprodukt gegeben durch die Zweipunktfunktion W_2: $(f,g) = \langle \Omega \mid Q_s(\bar{f}) Q_s(g) \mid \Omega \rangle = W_2(f,g)$.

Nun definieren wir das nichtkanonisch quantisierte Feld Q_T so (siehe die motivierende Diskussion in der Einleitung):

$Q_T(f) := Q_s(T * f)$; T soll eine temperierte Distribution sein, deren Träger in $\overline{V}_+$ liegt. Wenn dann $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{V}_+$, so ist $T * f$ eine Testfunktion mit $\operatorname{supp} T * f \subseteq \overline{V}_+$, d.h. $T * f$ ist eine Funktion von $S(\mathbb{R}^4)$ und $Q_T(f)$ ist wohl definiert.

Es sei $S(\mathbb{R}^4) \supseteq S_{\overline{V}_+} := \{ f \in S(\mathbb{R}^4) : \operatorname{supp} f \subseteq \overline{V}_+ \}$

und $S'_{\overline{V}_+} := \{ T \in S'(\mathbb{R}^4) : \operatorname{supp} T \subseteq \overline{V}_+ \}$.

Nach einem Lemma von Bros, Epstein und Glaser ist $T \in S'_{\overline{V}_+}$ genau dann, wenn $T = P(D)\,G$; dabei ist $P(D)$ ein partieller Differentialoperator und G eine polynominal beschränkte stetige Funktion mit $\operatorname{supp} G \subseteq \overline{V}_+$.

Nun berechnen wir die nichtkanonische Zweipunktfunktion $\mathcal{W}_{2T}$:

$$\mathcal{W}_{2T}(f,g) := \langle \Omega \mid Q_T^*(f)\, Q_T(g) \mid \Omega \rangle$$

$$= \langle \Omega \mid Q_S(\overline{T * f})\, Q_S(T * g \mid \Omega \rangle = \mathcal{W}_2(T * f, T * g).$$

Dazu benötigen wir eine Integraldarstellung von $\mathcal{W}_2$.

Aufgrund der Translationsinvarianz der Zweipunktfunktion $\mathcal{W}_2$ hat $\mathcal{W}_2 \in S'(\mathbb{R}^8)$ zunächst folgende Integraldarstellung /32/:

$$\mathcal{W}_2(z) = \int_{\mathbb{R}^4} W_2(z_x)\, dx;$$

dabei ist $z \in S(\mathbb{R}^8)$ und $z_x(\xi) := z(x, x-\xi)$, d.h. $z_x \in S(\mathbb{R}^4)$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$.

Für W_2 ergibt sich dann die Kaellen-Lehmann-Integraldarstellung /33/:

$$W_2(h) = \int_0^\infty d\varsigma(m) \int_{H_m} \hat{h}\, d\Omega_m, \qquad h \in S(\mathbb{R}^4).$$

Hier ist $d\varsigma(m)$ ein polynominal beschränktes Maß auf $\mathbb{R}_+$ und $d\Omega_m$ das (bis auf skalare Vielfache) einzige Lorentzinvariante Maß auf der Massenschale H_m.

Wegen $W_2(h) = \hat{W}_2(\hat{h})$ ergibt sich eine direkte Integraldarstellung von $\hat{W}_2$.

Im Sinne von Distributionen ergibt sich:

$$W_2(\xi) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty d\varsigma(m) \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left[-i\xi_0 k_0 + i\vec{\xi}\vec{k}\right] \frac{d^3\vec{K}}{K_0}$$

mit $k_o := \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$.

Wir berechnen $\mathcal{W}_2(z)$ für $z = f \circledast g$, $f,g \in S(\mathbb{R}^4)$, (für den Übergang von $\mathcal{W}_2(f,g)$ zu $\mathcal{W}_2(f \circledast g)$ siehe das Nuklear-theorem /34/), und wir erhalten mit den obigen Integraldarstellungen:

$$\langle \Omega | \varphi_s(\bar{f}) \varphi_s(g) | \Omega \rangle = \mathcal{W}_2(f \circledast g) = \int dx\, d\xi\, W_2(\xi) \bar{f}(x) g(x+\xi)$$

$$= \int d\xi\, W_2(\xi) \tilde{g} * \bar{f}(\xi) \qquad (\text{mit } \tilde{g}(y) := g(-y))$$

$$= \int_0^\infty d\varsigma(m) \int \frac{d^3\vec{K}}{K_o} (\tilde{g} * \bar{f})\hat{}(K_o, \vec{K})$$

$$= 2(2\pi)^3 \int_0^\infty d\varsigma(m) \int \frac{d^3\vec{K}}{K_0} \hat{\tilde{g}}\, \hat{\bar{f}}(K_0, \vec{K}) = \hat{W}_2(\hat{\tilde{g}} \cdot \hat{f})$$

Für $z = f \circledast f$ und f reell symmetrisch ergibt sich speziell: $\| f \|^2 = \hat{W}_2(\hat{f}^2)$.

Nun definieren wir die Abbildung $R_T : S_{\bar{V}_+} \longrightarrow S(\mathbb{R}^4)$ durch $f \longrightarrow T * f$, wenn $T \in S'_{\bar{V}_+}$. Mit $z = R_T f \circledast R_T g$ ergibt sich dann für die nichtkanonische Zweipunktfunktion:

$$\langle \Omega | \varphi_T^*(f) \varphi_T(g) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \varphi_S^*(\overline{R_T f}) \varphi_S(R_T g) | \Omega \rangle$$

$$\hat{W}_2(\widehat{\bar{T} * \bar{f} \cdot T * g}) = \hat{W}_2(\hat{\bar{T}} \cdot \hat{\bar{f}} \cdot \hat{T} \cdot \hat{g})$$

$$(\hat{W}_2 \cdot |\hat{T}|^2)(\hat{\bar{f}} \cdot \hat{g}) .$$

Wenn $\hat{W}_2 \cdot |\hat{T}|^2$ ein polynominal beschränktes Maß ist auf $\bar{V}_+$ und Lorentz-invariant ist, so existiert nach Satz IX.33 /16/ ein polynominal beschränktes Maß σ auf $[0, \infty]$, so daß gilt:

$$\hat{W}_{2T}(\hat{f} \cdot \hat{g}) = \int_0^\infty d\sigma(m) \int_H \widehat{f * g}\, d\Omega_m = W_{2T}(f * g) .$$

Da $\hat{W}_2$ die Voraussetzungen von IX.33 erfüllt, genügt es, wenn T positiv definit ist und Lorentz-invariant; ist T nicht positiv definit - etwa die Differenz zweier positiv definiter Distributionen - so ist σ ein Maß auf $(-\infty, \infty)$, also W_{2T} nicht mehr positiv definit.

Setzen wir $W_2 = T$, so erhalten wir:

$$d\sigma(m) = \varsigma^3(m)\, dm \cdot (\vec{p}^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}}$$

so daß sich ergibt:

$$W_{2W_2}(\xi) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dm\, \varsigma^3(m) \int d^3\vec{p}\; e^{-i\xi_0 p_0 + i\vec{\xi}\vec{p}} \qquad (\vec{p}^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}}$$

In der Funktionalen Quantentheorie wählt man nicht $W_2 = T$, sondern definiert T indirekt durch

$$W_{2T}(\xi) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dm\, \varsigma(m) \int_0^\infty d\mu\, \varsigma^2(\mu) \int d^3\vec{p}\; e^{-i\xi_0 p_0 + i\vec{\xi}\vec{p}}$$
$$\cdot (\vec{p}^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} (\vec{p}^2 + \mu^2)^{-1}$$

Durch Partialbruchzerlegung des Nenners zeigt man, daß T nicht positiv definit ist, also dieses W_{2T} indefinite Metrik produziert /9/.

Da die Zweipunktfunktion eines Spinorfeldes durch Multiplikation mit $(\not{p} - m)$ aus W_2 hervorgeht, erhalten wir als asymptotisch regularisierte Zweipunktfunktion:

$$F(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C dp\, e^{ip\xi}\, \frac{\not{p} - m}{p^2 - m^2} \frac{(\not{p} - \mu)}{(p^2 - \mu^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3\vec{p}\; e^{-ip_0\xi_0 + i\vec{p}\vec{\xi}}\, \frac{(\not{p} - m)(\not{p} - \mu)}{(\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} (\vec{p}^2 + \mu^2)}$$

Die Stumpf-Scheerer'sche Wahl von T ist nicht als eine endgültige Festlegung der Zweipunktfunktion des Feldes zu betrachten, welches der Heisenberggleichung gehorchen soll. Vielmehr ist es notwendig, jedes System von n-Punktfunktionen in der Funktionalen Quantentheorie neu zu regularisieren, wenn eine höhere n-Punktfunktion hinzugenommen wird. Jede Erweiterung beeinflußt so immer wieder neu die Wahl von T. Im Prinzip müßten wir eine Folge von geeigneten Distributionen T_n betrachten; deshalb liegt es nahe, die Folge der Felder O_{T_n} mit folgender Definition zu verallgemeinern:

$$O : S'_{V_+} \times S(\mathbb{R}^4) \longrightarrow L(\mathcal{H})$$

$$(T, f) \longrightarrow O_s(T * f)$$

Die Abbildung O sollte die Eigenschaft haben, daß für festes f die Abbildung $O(\cdot, f)$ eine Kontraktion ist oder in irgendeinem Sinne einen Fixpunkt T_o besitzt; denn eine solche Eigenschaft drückt aus, daß die Approximation durch immer höhere φ-Gleichungssysteme sinnvoll ist. Ein Beweis dieser Eigenschaft für die Funktionale Quantentheorie steht noch aus.

Wir sagten schon, daß die Zweipunktfunktion W_{2T} nicht positiv definit ist, wenn es T nicht ist. D.h. die Regularisierung mit einem indefiniten T impliziert, lax gesprochen, indefinite Matrik.

Besonders bedeutend erscheint deshalb, daß sich die Wightman-Theorie erweitern läßt auf indefinite Metrik. Man geht so vor:

Für eine vorgegebene Feldtheorie sollen die Wightman-Distributionen die Vakuum-Erwartungswerte von Produkten von Feldoperatoren sein,

$$W_n(x_1, \ldots, x_n) := (\Omega \mid O(x_1) \ldots O(x_n) \mid \Omega).$$

$(\cdot, \cdot)$ ist eine nicht ausgeartete, hermitesche Sesquilinearform auf einem linearen Raum D, der auch das Vakuum Ω enthält;

abweichend vom normalen Konzept fordern wir nicht die Positiv-Definitheit der W_n . $\Phi(x)$ ist eine operatorwertige temperierte Distribution, also gegeben durch eine Abbildung

$$S(\mathbb{R}^4) \ni f \longrightarrow \Phi(f) := \int d^4x\, \Phi(x) f(x),\ \Phi(f) \in \mathcal{L}(D)$$

und die Matrix-Elemente $(a \mid \Phi(f) \mid b)$ sind stetig in f für alle $a,b \in D$.

Nach dem Nukleartheorem von L. Schwarz sind dann die W_n Distributionen aus $S'(\mathbb{R}^{4n})$. Ist ferner das Feld hermitesch, so gilt: $W_n = \overline{W_n}$.

Trotz indefiniter Metrik bekommen wir nun wieder das Rekonstruktionstheorem /35/.

Denn sei $\underline{S} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S(\mathbb{R}^{4n})$ und $\underline{f}, \underline{g} \in \underline{S}$.
Dann läßt sich $\underline{S}$ zu einer topologischen *-Algebra machen durch die zwei Operationen

$$(\underline{f} \times \underline{g})(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{\mu+\nu=n} f_\mu(x_1, \ldots, x_\mu)\, g_\nu(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$$

und

$$(\underline{f}^*)_n(x_1, \ldots, x_n) := \overline{f_n(x_n, \ldots, x_1)} .$$

Eine Darstellung erhält man mit der folgenden Standardprozedur:
Auf $\underline{S}$ definieren wir $W(\underline{f}) := \sum_{\nu=0}^{\infty} W_\nu(f_\nu)$ mit $W_0 := 1$.
Zu W gehört in natürlicher Weise ein Linksideal R ,

$$R := \{\underline{g} \in \underline{S} : W(\underline{f} \times \underline{g}) = 0 \ , \ \text{für alle } f \in \underline{S}\}$$

Dann definieren wir als Definitionsbereich D den Quotientenraum $\underline{S}/R$; $[f]$ sei das Bild (unter der Quotientenabbildung) von $f \in \underline{S}$ und es werde gesetzt: $\Omega := [1]$.

Man überzeugt sich leicht, daß durch $([f], [g]) := W(\underline{f}^* \cdot g)$ eine nicht ausgeartete hermitesche Sesquilinearform auf D definiert ist und daß durch $\Phi(\underline{f})\,[g] = [\underline{f} \times \underline{g}]$ eine (linksreguläre) Darstellung von $\underline{S}$ gegeben wird. Die Eigenschaften

dieser Darstellung beschreibt das Rekonstruktionstheorem:

Es sei $\{W_n\}$ eine Folge von Distributionen $W_n \in S'(\mathbb{R}^{4n})$ mit $W_n(x_1,\dots,x_n) = \overline{W_n(x_n,\dots,x_1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Dann existieren

(i) ein linearer Raum D mit einer nichtausgearteten hermiteschen Sesquilinearform $(\cdot,\cdot)$;

(ii) ein normierbarer Vakuumzustand $\Omega \in D$, $(\Omega,\Omega) = 1$;

(iii) eine Darstellung $\underline{f} \longrightarrow \mathcal{O}(\underline{f})$ der Algebra $\underline{S}$ durch lineare Operatoren auf D , so daß
$(a \mid \mathcal{O}(\underline{f}) \mid b) = (\mathcal{O}(\underline{f}^*)\, a \mid b)$ gilt und
$\underline{f} \longrightarrow (a \mid \mathcal{O}(\underline{f})\, b)$ stetig ist für alle $a,b \in D$;
ferner gilt: $D = \{\mathcal{O}(\underline{f})\Omega \mid \underline{f} \in \underline{S}\}$ und

$$\int W_n(x_1,\dots,x_n)\, f_n(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \dots dx_n = (\Omega \mid \mathcal{O}(f_n)\Omega)$$

für alle $f_n \in S(\mathbb{R}^{4n})$.

D , Ω und $\mathcal{O}$ sind bis auf Isomorphie eindeutig durch (i), (ii) und (iii) bestimmt.

Genügen die W_n überdies der Bedingung

$$W_n(x_1,\dots,x_i,x_{i+1},\dots,x_n) = W_n(x_1,\dots,x_{i+1},x_i,\dots,x_n)$$

für raumartige $(x_i - x_{i+1})$, so gilt $[\mathcal{O}(\underline{f}),\mathcal{O}(\underline{g})] = 0$ für alle raumartig disjunkten $\underline{f}$ und $\underline{g} \in \underline{S}$.

Sind ferner die W_n Poincaré-invariant, so existiert eine eindeutig bestimmte Darstellung der Poincaré-Gruppe auf D , die Ω und $(\cdot,\cdot)$ invariant läßt und das Feld kovariant transformiert.

Strocchi und Wightman /36/ haben für den Gupta-Bleuler-Formalismus die Verallgemeinerung der Wightman-Felder auf indefinite Metrik vorgenommen; Yngvason /37/ hat dann gezeigt, daß durch eine geeignet vorzunehmende Normierung die Wightman-Distributionen mittels eines unitären Operators G auf D bezüglich einer positiven Sesquilinearform $\langle\,,\,\rangle$ auf D dargestellt werden können:

$$W_n(x_1,\dots,x_n) = (\,O(x_1)\dots O(x_i)\Omega \,|\, O(x_{i+1})\dots O(x_n)\Omega\,)$$

$$= \langle O(x_1)\dots O(x_i)\Omega \,|\, G\,O(x_{i+1})\dots O(x_n)\Omega\rangle .$$

Allerdings müssen die W_n einer verallgemeinerten Schwarz-Ungleichung genügen.

Als Beispiel für einen unitären Operator G sei der durch die Partialbruchzerlegung der Heisenberg'schen Zweipunktfunktion erhaltene Fundamentaltensor g genannt / 9 /; g entspricht der Einschränkung von $\eta \otimes \eta$ auf den Zweiteilchensektor $F_A^{(2)}$.

V. Literaturverzeichnis

1. W. Heisenberg, Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, Hirzel Verlag, Stuttgart 1967
2. H. P. Dürr, F. Wagner, Nuovo Cim. 46, 223 (1966)
3. L. Hörmander, Fourier integral operators I, Acta Math. 127, 79-183 (1971)
4. L. Hörmander, J. Duistermaat, Fourier integral operators II, Acta Math. 128, 183-269 (1972)
5. siehe 1., Seite 33 ff.
6. W. Heisenberg, Z. Naturforsch. 9a, 292 (1954)
7. K. Symanzik, Regularized Quantum Field Theory, in "New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics", Cargèse 1976
8. siehe 1., Seite 55, Gleichung 4(13)
9. H. Stumpf, New Representation Spaces of the Poincaré Group and Functional Quantum Theory, in Vorbereitung
10. siehe 1., Seite 23
11. H. Stumpf, Functional Relativistic Cluster Theory, Acta Phys. Austr. Suppl. IX, 195-255 (1972)
12. E. W. Schmid, H. Ziegelmann, The Quantum Mechanical Three Body Problem, Vieweg Tracts in Pure and Applied Physics, Braunschweig 1974
13. Ch. Horrix, Diplomarbeit, Tübingen 1978
14. H. Stumpf, Z. Naturforsch. 27a, 1058 (1972)
15. H. Stumpf, Z. Naturforsch. 31a, 528 (1976)
16. M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II, Academic Press 1975
17. A. Rieckers, Thesis, München 1969
18. K. Dammeier, Z. Naturforsch. 27a, 1042 (1972)

19. K. Scheerer, Thesis, Tübingen 1972
W. Bauhoff, Z. Naturforsch. 29a, 1394 (1974)

20. H. Rampacher, H. Stumpf, F. Wagner, Fortschritte der Physik 13, 385 (1965)

21. R. Haag, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selesk. 29, No. 12 (1955)

22. L. Garding, A. S. Wightman, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 40, 622 (1954)

23. R. T. Powers, Commun. Math. Phys. 4, 145 (1967)

24. G. F. Dell'Antonio, Ann. of Phys. 16, 153 (1961)

25. O. W. Greenberg, J. Math. Phys. 3, 859 (1962)

26. A. L. Licht, T. C. Toll, Nuovo Cim. 21, 346 (1961)

27. D. W. Robinson, Helv. Phys. Acta 35, 403 (1962)

28. L. Streit, Nuovo Cim. 34, 198 (1964)

29. A. H. Völkel, Commun. Math. Phys. 2, 176 (1966)

30. siehe z.B. Part III in N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, J. T. Todorov, Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory, W. A. Benjamin Inc. 1975

31. siehe 16., Seite 207 ff.

32. siehe 16., Seite 66

33. siehe 16., Seite 70

34. M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. Theorem V.12.

35. E. Scheibe, Über Feldtheorien in Zustandsräumen mit indefiniter Metrik, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München 1960

36. Strocchi, Wightman, J. Math. Phys. 15, 2198 (1974)

37. J. Yngvason, Rep. Math. Phys. 12, 57 (1977)

Lebenslauf

Geboren:	05.05.1949 in Orsoy am Niederrhein
Eltern:	Fritz Ramacher, Polizeibeamter, gestorben 1959, und Sybille Ramacher, geb. Fliegel
Schulbesuch:	1955 - 1959 Volksschule Utfort 1959 - 1968 Staatl. Gymnasium Adolfinum in Moers
Abitur:	Mai 1968
Studium:	Physikstudium (Diplom) im Wintersemester 1968/69 an der Universität Tübingen begonnen Vordiplom: April 1971 Anfertigung der Diplomarbeit im Wahlfach Mathematik seit Mitte 1973 unter Anleitung von Prof. Dr. R. Nagel mit dem Titel "Ordnungsstruktur von C^*-Algebren"; zweiter Referent ist Prof. Dr. Schlieder aus München Diplomprüfung: Oktober 1974 Beginn der Dissertation im April 1976 am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen unter der Leitung von Prof. Dr. H. Stumpf; Titel der Arbeit: "Faddeev-Gleichungen in der Funktionalen Quantentheorie des nicht-linearen Spinorfeldes"; Beendigung der Dissertation im Sommer 1979
Akademische Lehrer:	in Mathematik: Wielandt, Fischer, Radbruch, Strambach, Beekmann, Schaefer, Tamaschke, Heyer, Wolff, Nagel in Physik: Krüger, Gönnenwein, Baumann, Mack, Kasper, Schief, Stumpf, Mitter, Höhn, Rieckers